

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

1977
Informe final

Madrid, Febrero 1978

COLUMNAS LIQUIDAS EN CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

Expediente nº 13/77

Convenio de Investigación entre la Comisión Nacional de Investigación del Espacio (CONIE) y la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), desarrollado por el Laboratorio de Aerodinámica y Mecánica de Fluidos (LAMF) de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) durante el año 1977.

Responsable del trabajo	I. Da-Riva de la Cavada
Colaboradores	I. Martínez Herranz
	J. Meseguer Ruiz

INDICE

LISTA DE SIMBOLOS

ANTECEDENTES	1
INTERES DEL ESTUDIO	2
CAPITULO 1º.- CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES	3
1.1. HIPOTESIS GENERALES	4
1.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO	5
- Método de la curvatura	5
- Método variacional	7
1.3. SOLUCIONES EXACTAS	9
1.4. SOLUCION EXACTA PARA ZONAS NO GIRATORIAS Y EN INGRAVIDEZ	10
- Expresión analítica de la superficie	15
1.5. SOLUCIONES APROXIMADAS PARA ZONAS CASI CILINDRICAS	19
- La zona cilíndrica	19
- Deformación por exceso de volumen de líquido	20
- Deformación por gravedad axial	23
- Deformación por gravedad transversal	24
NOTA ANEXA	27
CAPITULO 2º.- ESTABILIDAD ESTATICA DE LA CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES	29
2.1. INTRODUCCION	30
2.2. PLANTEAMIENTO	30
2.3. CAPACIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO	31
- Cálculo del volumen máximo	34
- Cálculo del volumen mínimo	34

2.4.	ANALISIS ESTATICO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO	41
2.5.	PUNTUALIZACIONES SOBRE CIERTOS CASOS PARTICULARES	50
	- Límite de estabilidad de las zonas cilíndricas en reposo	55
	- Límite de estabilidad de las zonas cate- noides	59
2.6.	FORMULACION VARIACIONAL DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE. CASO GENERAL.	61
2.7.	EFFECTO DE LA ROTACION SOBRE LA ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS	62
CAPITULO 3°.-	ESTRUCTURA INTERNA. GIRO DE UNO DE LOS DISCOS	67
3.1.	INTRODUCCION	68
3.2.	ECUACIONES BASICAS	72
3.3.	GIRO DE UNO DE LOS DISCOS EN UNA ZONA FLOTANTE EN REPOSO	75
	- Zona central	77
	- Región del borde del disco	78
3.4.	RESULTADOS	82
3.5.	OTRAS SOLUCIONES DE LA ZONA CENTRAL	88
3.6.	CONCLUSIONES	90
CAPITULO 4°.-	GIRO DE UNO DE LOS DISCOS. EXPERIMENTACION EN TIERRA	92
4.1.	INTRODUCCION	93
4.2.	DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO	95
4.3.	CONCLUSIONES	101
4.4.	ANALISIS DE LOS RESULTADOS	103
	- Láminas	107
REFERENCIAS	111

PREVISIONES 116

 - Estudios teóricos de la hidrodinámica de la
 zona flotante 116

 - Estudios experimentales: visualización, medi
 ción e interpretación 117

MEMORIA 120

APENDICE 121

LISTA DE SIMBOLOS

- C , Número de Bond: $C = 2 \omega^2$.
- D , Diámetro de los discos soporte.
- E , Energía (de presión más de superficie).
Número de Ekman: $E = \nu / \Omega R^2$.
- G , Aceleración gravitatoria o inercial.
- L , Longitud de la zona.
- P , Presión absoluta.
- R , Radio de los discos soporte.
- T , Energía cinética.
- U , Energía potencial.
- V , Volumen de líquido en la zona.
- a , Radio adimensional de los discos soporte: $a = R/L$.
- b , Parámetro de la familia de catenoides definida en (23) Cap. 2^a.
- c , Curvatura local adimensionalizada con la longitud de la zona.
- e , Energía adimensional reducida (ver Tabla 1.1).
- g , Aceleración de la gravedad (o inercial) adimensional:
 $g = \frac{\rho G L^2}{\sigma}$.
- m , Parámetro definidor de la curva de la sección meridiana, definido en (17) Cap. 1.
Modo azimuthal definido en (35) Cap. 2.
- n , Modo longitudinal definido en (35) Cap. 2.

- p , Presión relativa en el origen: $p = \frac{P_o - P_a}{\sigma} L$. Caps. 1 y 2.
 Presión adimensionalizada con $\rho \Omega^2 R^2$. Caps. 3 y 4.
- r , Radio de la superficie de una zona adimensionalizado con L .
- s , Superficie adimensional reducida (ver Tabla 1.1).
- t , Tiempo adimensionalizado con Ω^{-1} .
- u , Velocidad radial adimensionalizada con ΩR .
- v , Velocidad azimutal adimensionalizada con ΩR .
 Volumen adimensional de la zona: $v = V/L^3$.
- V , Volumen adimensional reducido (ver Tabla 1.1).
- w , Velocidad longitudinal adimensionalizada con ΩR .
- x , Coordenada longitudinal adimensionalizada con L .
- X , Coordenada adimensional longitudinal reducida (ver Tabla 1.1).
- y , Coordenada transversal adimensionalizada con L .
- Y , Coordenada adimensional transversal reducida (ver Tabla 1.1).
- z , Coordenada longitudinal adimensionalizada con L .
- Ω , Velocidad angular de rotación de la zona.
- α , Parámetro definidor del tipo de curva meridiana (ver Tabla 1.1).
- β , Sobrepresión definida en (41) Cap. 1.
- γ , Angulo de la tangente con el eje.
- ϵ , Parámetro pequeño según definición (43) ó (53) Cap. 1.

- η , Deformación respecto al cilindro según definición (38) ó (54) Cap. 1 ó (35) Cap. 2.
- θ , Angulo de contacto sólido-líquido-gas. Coordenada azimutal.
- λ , Multiplicador de Lagrange (en nuestro caso coincide con la presión adimensional).
- ν , Viscosidad cinemática del líquido: $\nu = \mu/\rho$.
- ξ , Separación respecto al cilindro: $\xi = (r-1)/\sqrt{E\epsilon\tau}/2$.
- ρ , Densidad del líquido. Deformación respecto al cilindro, definido en (49) Cap. 1.
- σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.
- τ , Tiempo adimensional ampliado: $\tau = t/\epsilon$.
- ϕ , Función de Euler definida en (8) Cap. 1.
- φ , Parámetro generador de las curvas meridianas (ver Tabla 1.1).
- ω , Velocidad de rotación adimensional: $\omega = \sqrt{\frac{\rho\Omega^2 L^3}{2\sigma}}$.

ANTECEDENTES

Este Laboratorio está trabajando desde finales de 1975 en el estudio de las Columnas Líquidas en Condiciones de Ingravidez.

En 1975 se trazó el plan de la investigación, se apuntaron los problemas de mayor importancia y se buscó la bibliografía necesaria para la toma de contacto con las teorías existentes.

En 1976 se empezó el trabajo propiamente dicho con el análisis de las formas de equilibrio axilsimétricas de las zonas líquidas comprendidas entre dos discos coaxiales. Fue necesario mucho cálculo numérico para obtener soluciones "exactas", y se utilizó el procedimiento de diferenciación paramétrica, lo cual nos sirvió de guía para abordar el problema de la estabilidad de las zonas cilíndricas, que resultó muy fructífero.

Durante ese mismo año este Laboratorio preparó una realización cinematográfica sobre el comportamiento previsible (en dibujo animado) de las zonas flotantes. Esta película, junto con un par de artículos sobre el tema, fueron presentados en el 2º Simposium Europeo de Ciencia de los Materiales en el Espacio, organizado por la Agencia Espacial Europea y celebrado en Frascati (Italia) en abril de 1976.

En 1977 se continuó el trabajo sobre las formas de equilibrio añadiendo nuevos efectos, se desarrolló extensamente el análisis estático de la estabilidad (que ha dado lugar a una Tesis Doctoral), y se acometió uno de los problemas clave de la dinámica de las zonas flotantes: el movimiento del fluido en las proximidades del borde de los discos.

INTERES DEL ESTUDIO

Una clara muestra del interés que tiene el estudio de la zona flotante nos la da el plan de investigaciones científicas propuestas para realizar en el SPACELAB.

A. Geofísica

B. Astrofísica

C. Materiales

- Gases.

- Líquidos. Se dispondrá de un Módulo de Ensayos (FPM) para la experimentación con zonas líquidas flotantes en varios campos de la mecánica de fluidos.

- Sólidos. Purificación de cristales en zonas líquidas flotantes de semiconductores compuestos de los grupos III, IV y V para uso en electrónica, óptica, laser, transductores, etc.. Cristalización de materiales no miscibles. Fibras monocristalinas de muy alta resistencia.

D. Biología

- Estudio sistemático del organismo humano.

- Funciones celulares básicas.

- Separación de sustancias por electroforesis: células, proteínas, sueros inmunizantes, etc..

Como se ve, la técnica de la zona flotante es ampliamente utilizada en la investigación en ingravidez, pues proporciona un conjunto de posibilidades que capacitan para la realización de una gran parte de los experimentos propuestos, en particular relativo a contenedores sin paredes que introducirían efectos no deseados (nucleación en paredes, fuerzas de adhesión, rozamiento, etc.).

CAPITULO 1

CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES

1. CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES.

1.1. HIPOTESIS GENERALES

Se considera una zona líquida comprendida entre dos discos coaxiales y rodeada de un gas de densidad mucho menor que la del líquido y que se supondrá despreciable frente a ésta.

Las propiedades de la superficie de separación [1] se consideran uniformes.

Salvo en el apartado 1.5 en que se tiene en cuenta el efecto de microgravedad transversal, a lo largo de todo el estudio, se supondrá que las acciones son axilsimétricas; es decir, que, tanto las condiciones de contorno, como las fuerzas másicas actuantes, son las mismas en todo plano meridiano. Basándonos en esta hipótesis, supondremos que la forma de la superficie de equilibrio es, así mismo, axilsimétrica.

La zona puede estar sometida a una velocidad de giro - uniforme alrededor del eje, ya que, en régimen estacionario, equivaldría a un movimiento como sólido rígido.

El ángulo de contacto sólido-líquido-gas, θ , es constante para cada pareja sólido-líquido.

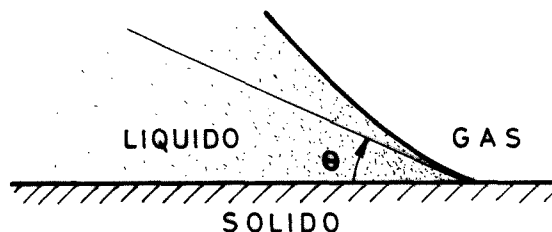


Fig. 1.1. Ángulo de contacto sólido-líquido-gas.

En este estudio de las formas de equilibrio, no se tienen en cuenta la estabilidad, sino la posibilidad de que pueda existir equilibrio bajo las condiciones prescritas.

La Fig. 1.2 muestra esquemáticamente la configuración de la zona y sus parámetros característicos.

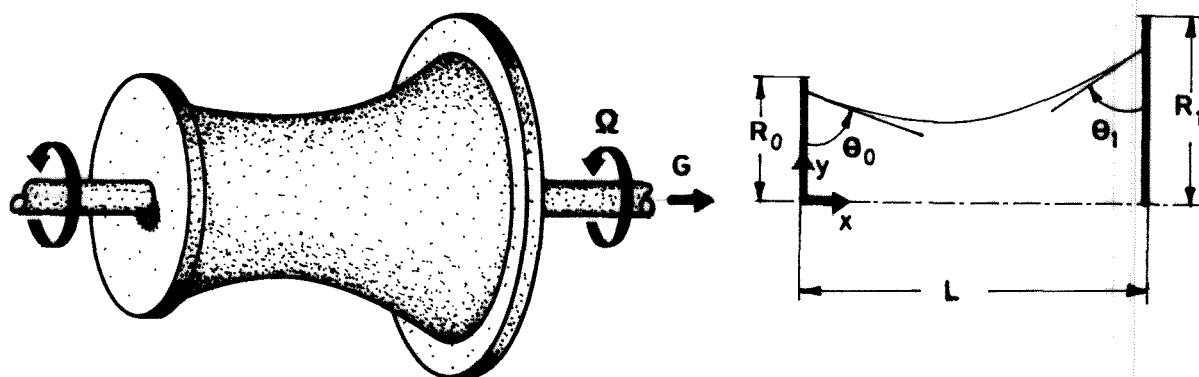


Fig. 1.2. Esquema de una zona flotante.

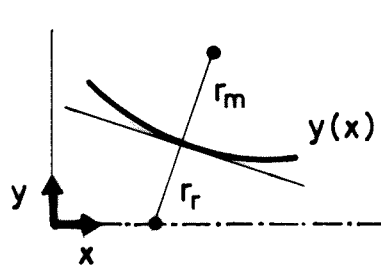
1.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO.

Se pueden seguir dos procedimientos:

Método de la curvatura

Expresando la condición de equilibrio local de presiones (ecuación de la hidrostática) en la superficie de separación líquido-gas obtenemos la ecuación diferencial que gobierna la forma de equilibrio; esto es: curvatura total proporcional al salto de presiones de uno a otro fluido.

En la Fig. 1.3. se da un esquema para el cálculo de la curvatura total en superficies de revolución.



$$\frac{1}{r_m} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r_r} = \frac{-1}{y(1+y'^2)^{1/2}}$$

$$c = \frac{1}{r_m} + \frac{1}{r_r}$$

Fig. 1.3. Cálculo de la curvatura total en superficies de revolución.

La ecuación que resulta es la siguiente:

$$\underbrace{\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}}_{\text{curvatura total}} + \underbrace{\omega^2 y^2}_{\text{efecto inercial}} + \underbrace{gx}_{\text{efecto gravitatorio}} + \underbrace{p}_{\text{caída de presión desde el origen a la atmósfera}} = 0 \quad (1)$$

siendo $y(x)$ la sección meridiana de la superficie de equilibrio, $\omega = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma}}$ la relación entre la frecuencia del giro y una frecuencia característica, g la relación entre la presión hidrostática y la presión capilar, y p la relación entre la diferencia de presión desde el punto origen a la atmósfera circundante y la presión capilar.[†]

Completan el planteamiento matemático del problema, las condiciones en los dos límites, que son:

$$^{\dagger} \quad g = \frac{\rho GL^2}{\sigma}, \quad p = \frac{(P_o - P_a)L}{\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{una de estas dos} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \Big|_{x=0} = a_0 = \frac{R_0}{L} \\ y' \Big|_{x=0} = -\operatorname{ctg} \theta_0 \end{array} \right\} \text{ en una placa} \\
 \\
 \text{y otra de estas dos} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \Big|_{x=1} = a_1 = \frac{R_1}{L} \\ y' \Big|_{x=1} = \operatorname{ctg} \theta_1 \end{array} \right\} \text{ en la otra}
 \end{array} \right\} \quad (2)$$

según que el líquido llegue o no al borde del disco, en cada caso. Normalmente será $\theta_0 = \theta_1$. Para determinar la forma de equilibrio es necesario, además, saber de antemano el volumen de líquido contenido:

$$\frac{V}{L^3} = \pi \int_0^1 y^2 dx. \quad (3)$$

Método variacional

La simplicidad del método anterior, radica en que el cálculo de la curvatura local y su expresión en un sistema de coordenadas fijo son muy sencillos. Para configuraciones no axilsimétricas, el análisis habría de hacerse en coordenadas curvilíneas intrínsecas [2] y su tratamiento resulta inabordable.

En cambio, el método variacional nos sirve en cualquier caso, y, pese a que las dificultades inherentes a la no-axilsimetría no desaparecen, este último método nos facilita un tratamiento más tipificado.

Se trata, simplemente, de establecer que el potencial cinético del sistema ha de ser extremal (principio de Hamilton de la mecánica clásica de sistema conservativos).

$$T - U = \text{extremal}, \quad (4)$$

siendo T y U las energías cinética y potencial, respectivamente, y que se calculan con las formulas

$$\frac{T}{\sigma L^2} = \frac{\pi}{2} \omega^2 \int_0^1 y^4 dx, \quad (5)$$

$$\frac{U}{\sigma L^2} = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx - \pi g \int_0^1 x y^2 dx. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que el volumen ha de ser dato,

$$\frac{V}{L^3} = \pi \int_0^1 y^2 dx, \quad (7)$$

podemos construir la función de Euler, ϕ , en la forma

$$\int_0^1 \phi dx = \frac{T-U}{\sigma L^2} + \lambda \frac{V}{L^3}, \quad (8)$$

y la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0, \quad (9)$$

que nos dará la ecuación diferencial de segundo grado (1), resultando que λ , el multiplicador de Lagrange, coincide con p.

1.3. SOLUCIONES EXACTAS

Como es obvio, no existe solución general para la ecuación diferencial (1), y la única manera de obtener la solución para un problema concreto es a base de cálculo numérico, presentándose, en cualquier caso, numerosos problemas de estabilidad y convergencia; algunos de estos resultados pueden encontrarse en la Ref.[3].

Uno de los grandes problemas en el cómputo numérico es que se ha de trabajar con curvaturas de funciones múltiples (no unívocas), ya que, como se aprecia en el ejemplo de la Fig. 1.4, unas mismas placas, con unas mismas condiciones en los límites, y un mismo volumen, pueden dar lugar, cuando menos, a dos soluciones distintas.

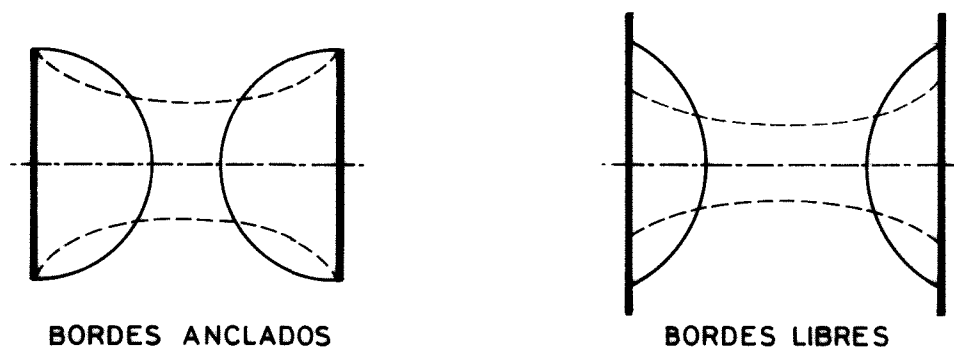


Fig. 1.4. Ejemplo de la no unicidad de la forma de equilibrio.

Cumpliendo ciertas hipótesis restrictivas, llegamos a soluciones analíticas sencillas entre las que cabe mencionar el

cilindro, la esfera, la catenoide, la onduloide y la nodoide.

Con la gravedad actuando axialmente no se conocen soluciones analíticas, así que, para profundizar algo en este estudio, no la consideraremos actuando nada más que en el apartado 1.5. - Aún así, la única solución analítica conocida con la zona en ro-tación es el cilindro; las demás conducen a integrales hiperelíp-ticas, por lo que relegamos también al apartado 1.5 su efecto, y pasamos a estudiar las soluciones exactas para zonas líquidas flo-tantes, no giratorias, en ingravidez.

1.4. SOLUCION EXACTA PARA ZONAS NO GIRATORIAS Y EN INGRAVIDEZ

El problema planteado se reduce a la ecuación diferen-cial adimensional

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + p = 0 \quad , \quad (10)$$

con las condiciones de contorno

$$y \quad \left\{ \begin{array}{l} \circ \quad y|_{x=0} = a_0 \\ \quad y'|_{x=0} = -\operatorname{ctg} \theta_0 \\ \circ \quad y|_{x=1} = a_1 \\ \quad y'|_{x=1} = \operatorname{ctg} \theta_1 \end{array} \right. \quad (11)$$

y el volumen conocido

$$\frac{V}{L^3} = v = \pi \int_0^1 y^2 dx \quad . \quad (12)$$

En esta formulación aparece un parámetro interno, p , que, una vez resuelta la ecuación diferencial (10) cumpliendo las condiciones en los límites prescritas, (11), se determina con ayuda de la ecuación (12).

El problema, así planteado, es muy difícil de manejar, por lo que se optó por atacarlo del modo siguiente:

- eliminado el parámetro p de la ecuación diferencial, mediante un cambio de escala en las coordenadas
- calculando la curva $y(x)$ "desde $-\infty$ a $+\infty$ "; es decir, no imponiendo las condiciones de contorno en los discos
- buscando la porción de curva que satisface nuestras condiciones particulares en los límites
- obteniendo la verdadera magnitud de la zona a partir del valor del volumen de líquido confinado.

Este es el método más intuitivo, y, pese a que la formulación es la más adecuada para el cómputo numérico, vamos a seguir una variante, con la única ventaja de que las representaciones gráficas dan una visión de conjunto más clara.

Si consideramos la sección meridiana de la superficie - de equilibrio, $y(x)$, como una porción de la solución general (des

de $-\infty$ a $+\infty$) de la ecuación diferencial sin condiciones límites - ("sin discos"), y nos ceñimos al estudio de estas curvas "continentes" (que contienen la solución), veremos que se trata de funciones periódicas.

Para ello, integramos una vez la ecuación diferencial (10) (como se hará después), y representamos la variación de $y'(x)$ en función de $y(x)$ (plano de las fases), observando que se trata de curvas cerradas; es decir, cíclicas (salvo en el caso $p = 0$, en que sólo hay un mínimo). Las funciones $y(x)$ son, además de periódicas, simétricas, por lo que basta conocer un semiperíodo para su completa determinación.

Tomemos el origen del eje x en la intersección del plano ventral (donde se presenta un máximo) con el eje de revolución. Como queda dicho, sólo no es válido para $p = 0$, pero este caso es muy sencillo de estudiar aparte.

Hagamos un cambio de escala de tal forma que la cota ventral (el valor máximo de $y(x)$, y_m), sea la unidad.

El problema queda en la forma siguiente:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} + py_m = 0 \quad , \quad (13)$$

$$y \Big|_{x=0} = 1 \quad , \quad (14)$$

$$y' \Big|_{x=0} = 0 \quad . \quad (15)$$

Al carecer de término en x , la ecuación diferencial (13) es integrable una vez. Sea γ el ángulo que la tangente a la curva $y(x)$ forma con el eje x ; se tendrá

$$y' = \operatorname{tg} \gamma \quad 1 + y'^2 = 1/\cos^2 \gamma, \quad (16)$$

y la ecuación (13) pasará a ser

$$-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}(y \cos \gamma) + p y_M = 0, \quad (17)$$

que, integrada con las condiciones (14) y (15) nos da

$$\cos \gamma = \frac{p y_M}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{y}. \quad (18)$$

Esta ecuación representa dos tipos de curvas: unas que no cortan al eje y (el coseno no llega nunca a anularse, véase Fig. 1.5), y otras que sí llegan a cortar. Las primeras se mueven desde $y = 1$ hasta $y = \frac{2}{p y_M} - 1$. Las segundas van desde $y = 1$ hasta $y = \sqrt{1 - \frac{2}{p y_M}}$. Pero el intervalo de validez de la fórmula (18) es $0 \leq \gamma \leq -\pi/2$, ya que la ecuación (1) se obtuvo suponiendo que el elemento de superficie dejaba el líquido en la parte próxima al eje. A partir de ahí, el líquido queda por "fuera" de la superficie (la parte más alejada al eje), y habremos de poner $-p$ en lugar de p , para poder seguir construyendo la curva desde $y = \sqrt{1 - \frac{2}{p y_M}}$ hasta $y = \frac{2}{p y_M} - 1$.

Llamando m a este valor mínimo (único parámetro de la solución)

$$m = \frac{2}{py_M} - 1 \quad , \quad (19)$$

se han representado en la Fig. 1.5 las distintas curvas del plano

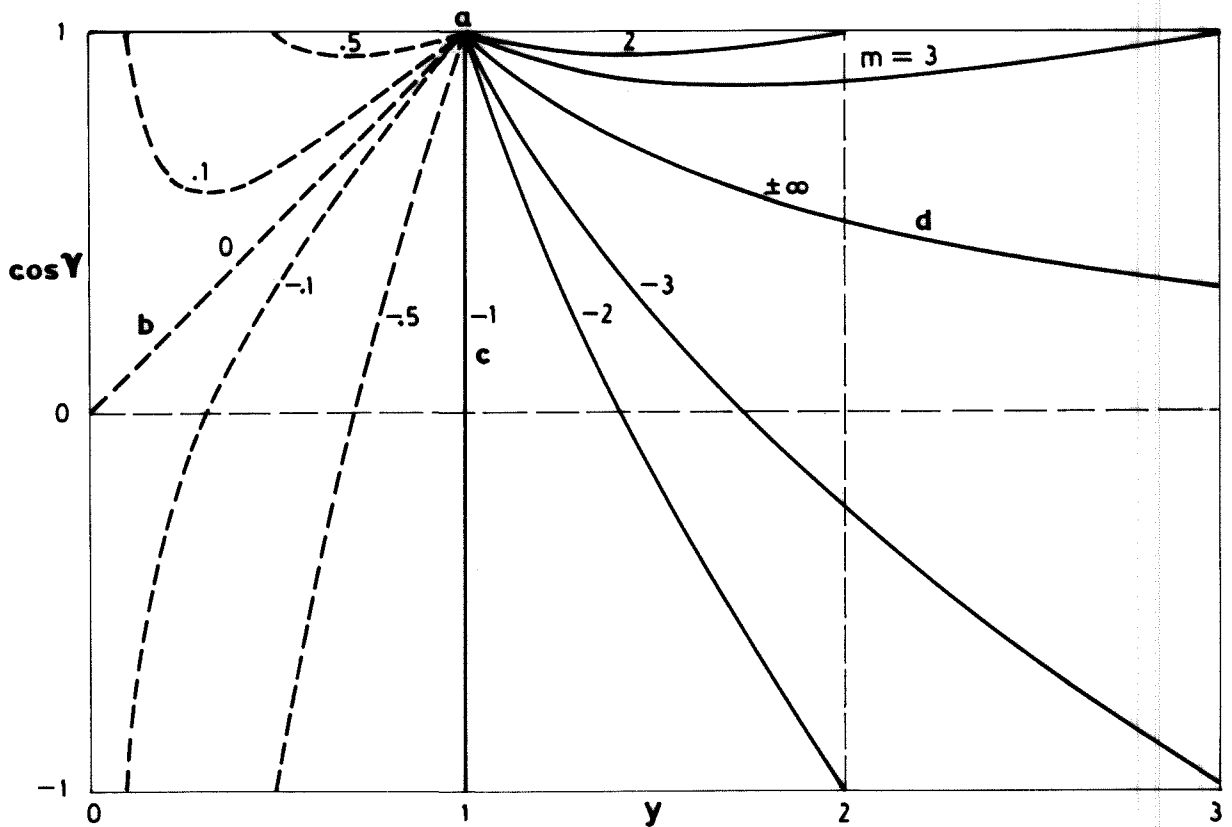


Fig. 1.5. Plano de las fases del problema (13)-(14)-(15).

----- tomando como unidad la y máxima

———— tomando como unidad la y mínima

a, Punto correspondiente a la forma cilíndrica

b, Curva divisoria correspondiente a la forma esférica

c, Curva divisoria correspondiente a la forma límite bidimensional

d, Curva divisoria correspondiente a la forma de catenoide.

de las fases del problema (13-14-15). Para obtener una visión más completa, se ha duplicado toda la representación, una vez dividiendo por la y máxima (como venimos diciendo), y otra dividiendo por la y mínima.

Expresión analítica de la superficie

Despejando y' de (18) teniendo en cuenta (16), obtenemos

$$y' = -\sqrt{\left(\frac{1+m}{y + \frac{m}{y}}\right)^2 - 1} \quad , \quad (20)$$

esto es,

$$x = - \int_1^y \frac{y^2 + m}{\sqrt{(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad . \quad (21)$$

Esta es una cuadratura elíptica, y puede ponerse en función de las integrales elípticas de primera y segunda especie, F y E ,

$$F = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \quad E = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \quad (22)$$

con el cambio de variables

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - m^2 \quad \text{sen}^2 \varphi = \frac{1 - y^2}{1 - m^2} \quad . \quad (23)$$

La solución es

$$x = \cos \alpha F(\varphi, \alpha) + E(\varphi, \alpha) \quad , \quad (24)$$

y el semiperiodo, X , vendrá dado por

$$X = \cos \alpha F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \quad . \quad (25)$$

En la Fig. 1.6 se ha representado la función $y(x)$ en un semiperiodo para varios valores del parámetro m .

Conviene tener también las expresiones del volumen y la superficie desde la sección ventral a una genérica

$$v = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_y^1 y^2 \frac{y^2 + m}{\sqrt{-(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad , \quad (26)$$

$$s = 2\pi \int_0^x y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_y^1 \frac{(1 + m)y^2}{\sqrt{-(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad , \quad (27)$$

que resultan ser

$$v = \frac{\pi}{3} [\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha F(\varphi, \alpha) + \\ + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) E(\varphi, \alpha)] \quad , \quad (28)$$

$$s = 2\pi(1 + \cos \alpha) E(\varphi, \alpha) \quad . \quad (29)$$

Puesto que se han duplicado algunas representaciones tomando como unidad el valor mínimo de la función (en lugar del máximo), en la Tabla 1.1 se incluyen los resultados que se obtendrían, con el fin de que este análisis resulte más completo (aparte de la fiabilidad que supone disponer de un método de comprobación de resultados).

Para pasar de estas expresiones-reducidas a los valores

Tabla 1.1. Formulario resumen de las formas de equilibrio

Expresión paramétrica de la sección meridiana de la superficie de equilibrio:

$$a) \dagger \quad x = |\cos \alpha F(\varphi, \alpha) + E(\varphi, \alpha)| \quad (30)$$

$$b) \ddagger \quad x = \left| \frac{\cos \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha) + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)]}{\cos \alpha} \right| \quad (31)$$

$$a) \quad y = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \quad (32)$$

$$b) \quad y = \left| \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \alpha} \right| \quad (33)$$

Volumen encerrado hasta una sección genérica:

$$a) \quad v = \frac{\pi}{3} \left| \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha F(\varphi, \alpha) + \right. \quad (34)$$

$$\left. + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) E(\varphi, \alpha) \right|$$

$$b) \quad v = \frac{\pi}{3} \left| -\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha [F(\frac{\pi}{2}, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + \right. \quad (35)$$

$$\left. + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) [E(\frac{\pi}{2}, \alpha) - E(\varphi, \alpha)] / \cos^3 \alpha \right|$$

Superficie lateral hasta una sección genérica:

$$a) \quad s = 2\pi(1 + \cos \alpha)E(\varphi, \alpha) \quad (36)$$

$$b) \quad s = \frac{2(1 + \cos \alpha)[E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)]}{\cos^2 \alpha} \quad (37)$$

Energía (de presión + de superficie) hasta una sección genérica:

$$a) \quad e = \frac{2}{1 + \cos \alpha} v + s \quad (38)$$

$$b) \quad e = \frac{2}{1 + \cos \alpha} v \cos \alpha + s$$

† a), Valores a partir de la sección ventral reducidos con y_M . El tipo de curva viene dado por α , siendo $m = \cos \alpha$.

‡ b), Valores a partir de la sección nodal, reducidos con y_m . El tipo de curva viene dado por α , siendo $m = 1/\cos \alpha$.

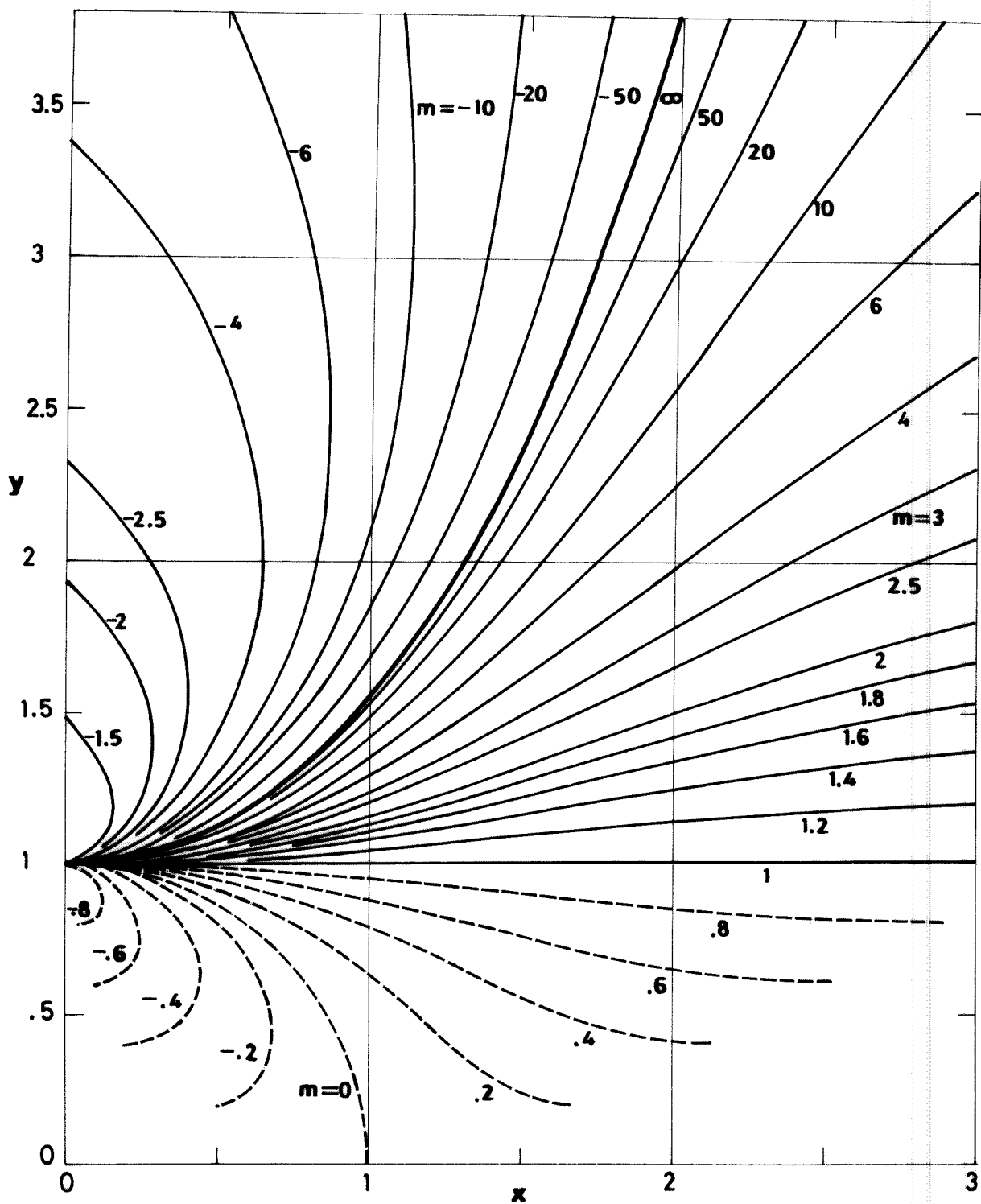


Fig. 1.6. Secciones meridianas de las superficies de revolución de curvatura constante, reducidas con el valor máximo (---) o con el mínimo (—). El valor del parámetro m coincide con el valor de la función en el extremo del semiperiodo.

de las magnitudes deseadas (esbeltez D/L , volumen V y energía E) hay que imponer la condición de escala, es decir, que en la realidad, la columna está comprendida entre $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

1.5. SOLUCION APROXIMADA PARA ZONAS CASI CILINDRICAS

Sabemos que la superficie cilíndrica de revolución es una de las posibles formas de equilibrio de una zona flotante, incluso con rotación.

La zona cilíndrica

Una zona cilíndrica puede presentarse en los tres casos ideales siguientes (ver Fig. 1.7):

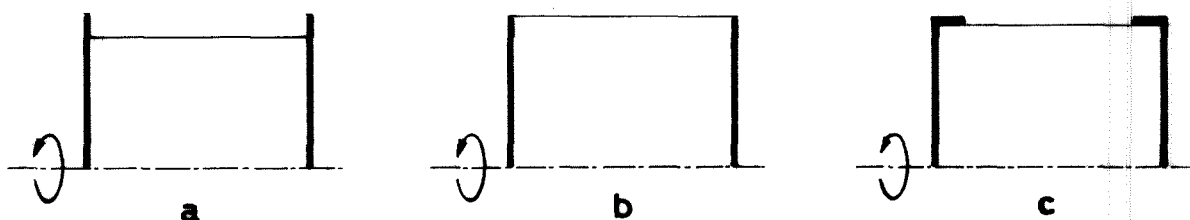


Fig. 1.7. Casos simples de zona cilíndrica.

a) Cuando el ángulo de contacto líquido-sólido-gas es de 90° . En este caso, para cualquier volumen, la zona será cilíndrica si el líquido no alcanza el borde. No importa si los discos son desiguales.

b) Cuando el ángulo de contacto es menor de 90° , (líquido que moja), existe un volumen de líquido para el cual, con ambos discos iguales, se formará una zona cilíndrica.

c) Para ángulos de contacto mayores de 90° , (líquido - que no moja), es necesario que los discos tengan reborde (ver - Fig. 1.7.c) para que pueda existir zona cilíndrica, la cual sólo lo será para un volumen apropiado.

Puede darse, claro está, algún caso combinado de los - anteriores.

Ahora estamos interesados en obtener una expresión analítica sencilla de las formas casi cilíndricas. Esta desviación puede ser debida a muchas causas, de las cuales vamos a analizar las más comunes, separadamente, pues la linealidad del análisis (con las mismas condiciones en los límites), nos permitirá aplicar el principio de superposición.

Deformación por exceso de volumen de líquido

En las zonas cilíndricas normales (casos b y c de la - Fig. 1.7), una diferencia en volumen respecto al del cilindro produce una deformación en forma de huso o en forma de barril, según haya defecto o exceso de líquido, respectivamente. En cualquier - caso, si admitimos que la zona sigue siendo axisimétrica, podemos hacer uso de la ecuación (1), la cual, tomando

$$y(x) = a[1 + \varepsilon \eta(x)] \quad \text{con} \quad \varepsilon \ll 1 \quad , \quad (38)$$

y reteniendo solamente términos de orden ε , pasa a ser

$$\eta'' + \frac{1}{\alpha^2} \eta + \beta = 0 \quad , \quad (39)$$

siendo α el radio "modificado" por la rotación

$$\alpha = a(1 + 2\omega^2 a^3)^{-1/2} \quad , \quad (40)$$

y β la diferencia de presión respecto a la del cilindro, convenientemente escalada, de forma que la presión en el eje (es constante) sea

$$p = \frac{1}{a} - \omega^2 a^3 + \epsilon a \beta \quad . \quad (41)$$

El parámetro de linealización, ϵ , es el exceso relativo de volumen de líquido en la zona

$$\epsilon = \frac{V - \pi a^2}{\pi a^2} \quad . \quad (42)$$

La ecuación diferencial (39) con condiciones de contorno no homogéneas (bordes anclados), tiene por solución

$$\eta = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2\alpha} \cdot \operatorname{sen} \frac{1-x}{2\alpha}}{2\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2\alpha} - \cos \frac{1}{2\alpha}} \quad . \quad (43)$$

El cálculo anterior no es válido si $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. En el capítulo siguiente se verá que ese es un límite de estabilidad, estando indeterminada la forma de la zona (en este análisis lineal).

La deformada, (43), es del tipo esperado, con valor máximo en mitad del intervalo. Para el manejo de zonas flotantes, es importante tener en cuenta esta deformación máxima, que, adimensionalizada como siempre con la longitud de la zona, podemos poner

$$y_M = a \left(1 + \frac{v - \pi a^2}{\pi a^2} \frac{1 - \cos \frac{1}{2\alpha}}{4 \sin \frac{1}{2\alpha} - 2 \cos \frac{1}{2\alpha}} \right) \quad (44)$$

En la Fig. 1.8 se presenta este resultado del análisis lineal junto con el valor exacto, calculado con ayuda de la ecuación (30).

Se han hecho los cálculos con $a = .5$ ($D/L = 1$), pero la influencia de a es despreciable (la pendiente en el origen, por ejemplo, pasa de ser .763 para $D/L = 1$ a ser .865 para $D/L = .4$). Como el efecto de la rotación es similar a una reducción del valor de a (ver (40)), la rotación apenas modifica la forma de las zonas casi cilíndricas.

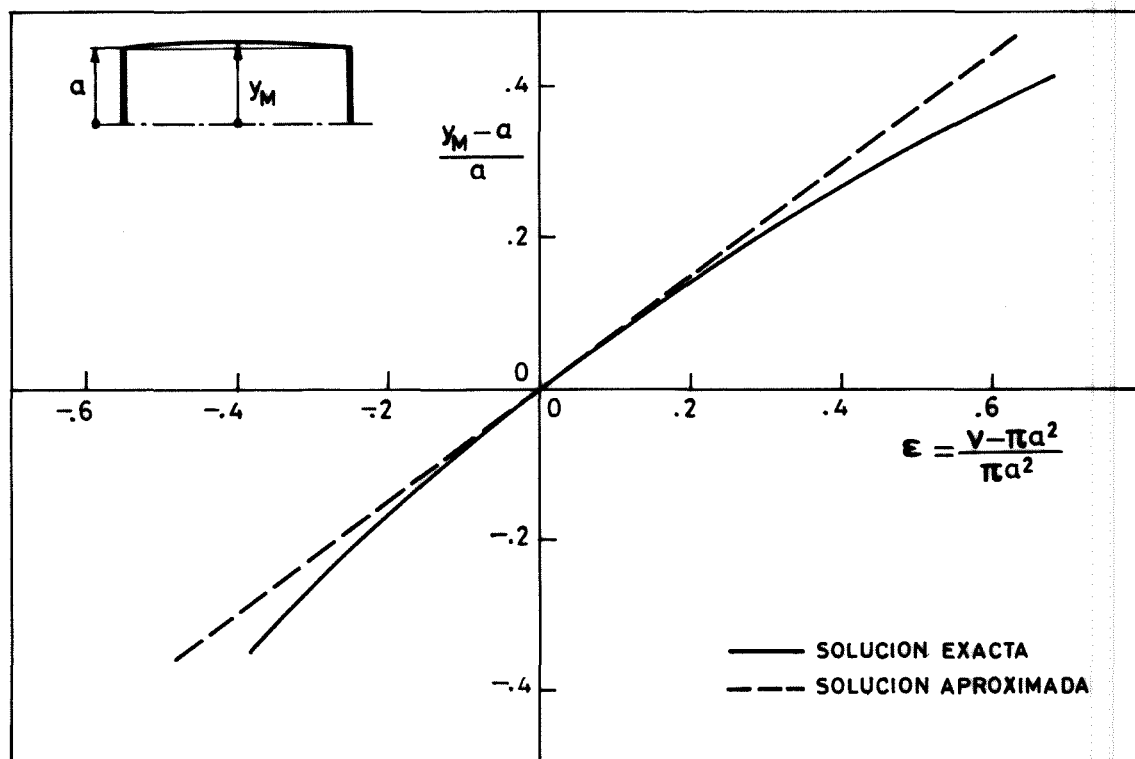


Fig. 1.8. Cota máxima de una zona con volumen ligeramente diferente al de una zona cilíndrica. Zona no giratoria, $a = .5$.

Deformación por gravedad axial

Consideremos una zona líquida en rotación, que, en ausencia de otros efectos más que la tensión superficial y las condiciones de mojado en los discos, tuviese forma cilíndrica. Es intuitivo que si la sometemos a un campo gravitatorio (o cualquier otra aceleración constante) en dirección axial, la zona se deformará, tomando el aspecto de ánfora (o de botella, si se trata del caso a) de la Fig. 1.7). Si la gravedad es pequeña, podemos suponer que la deformación es también pequeña, y ensayar soluciones, al igual que en el caso anterior, de la forma

$$y(x) = a[1 + \varepsilon \eta(x)] \quad \varepsilon \ll 1 \quad . \quad (45)$$

La ecuación (1) ya linealizada, se reduce a

$$\eta'' + \frac{1}{\alpha^2} \eta + x + \beta = 0 \quad , \quad (46)$$

donde α y β fueron introducidos en (40) y (41), y se ha tomado como parámetro de linealización la gravedad, de tal modo que se verifica

$$g = \varepsilon a \quad . \quad (47)$$

A la ecuación (46) hay que añadir las condiciones de contorno apropiadas. Por ejemplo, para el caso de zona con bordes anclados, $\eta(0) = \eta(1) = 0$ y la condición de conservación del volumen $\int_0^1 \eta dx = 0$, hecho todo lo cual, resulta

$$\eta = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - 2x - \frac{\sin \frac{1-2x}{2\alpha}}{\sin \frac{1}{2\alpha}} \right) \quad (48)$$

El valor máximo se presenta en la sección

$$x \Big|_{y_M} = \frac{1}{2} \left(1 + 2\alpha \arccos \left(2\alpha \sin \frac{1}{2\alpha} \right) \right) \quad (49)$$

La deformada, η , es antisimétrica respecto a la sección central. En la Fig. 1.9 se representa la máxima cota y la sección en que se produce, ambas en función de la esbeltez de la zona, mo dificada por efecto de la rotación.

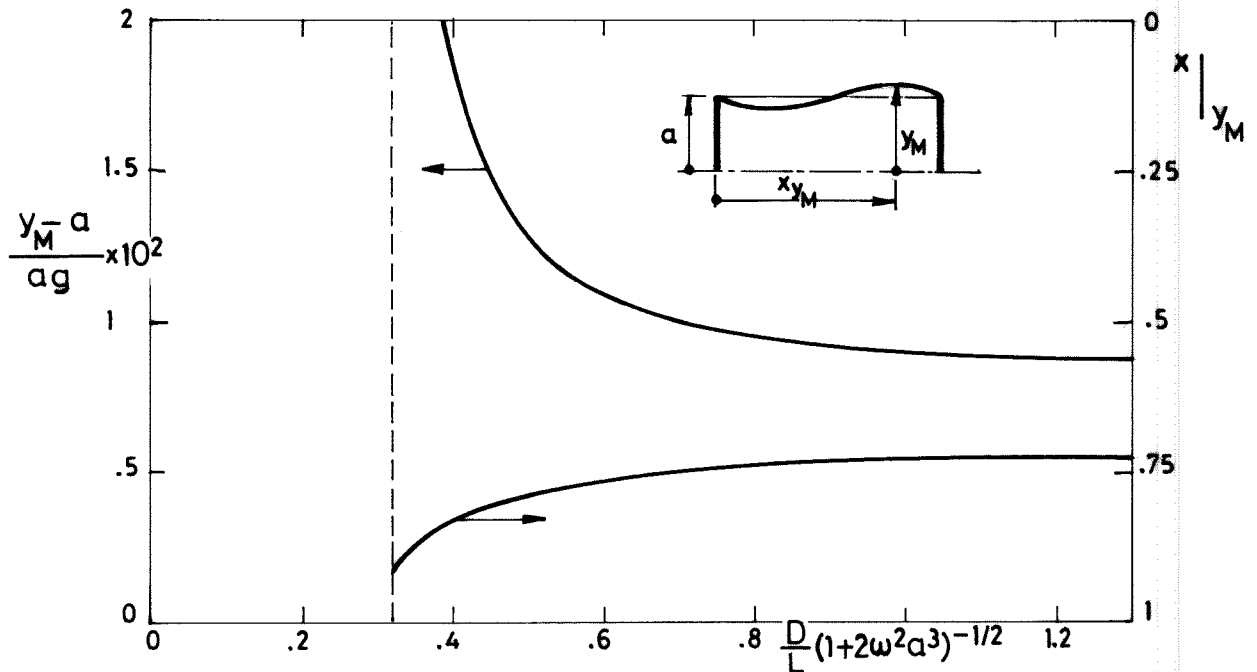


Fig. 1.9. Cota máxima de una zona inicialmente cilíndrica expuesta a una gravedad axial, y sección donde tiene lugar.

Deformación por gravedad transversal

Para poder tener en cuenta la deformación que produce

en una zona inicialmente cilíndrica, la acción de un campo gravitatorio cualquiera, supuesto de pequeña intensidad para poder linealizar y superponer el efecto de las componentes axial y transversal, nos falta analizar este último efecto. Obviamente, la forma resultante ya no va a ser axilsimétrica, sino que se comparará en el sentido de la gravedad. La ecuación (1) ya no es válida. Ponemos hasta el capítulo siguiente la obtención de una ecuación similar para formas no axilsimétricas; aquí, introduciremos directamente la expresión de la curvatura total de una superficie casi cilíndrica (aproximación lineal). Sea la superficie

$$r(z, \varphi) = a[1 - \varepsilon \rho(z, \varphi)] \quad \varepsilon \ll 1, \quad (50)$$

la curvatura total es, aproximadamente, en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) ,

$$c = \varepsilon a \left(\rho_{zz} + \frac{1}{a^2} \rho_{\varphi\varphi} + \frac{1}{a^2} \rho \right). \quad (51)$$

La presión en el origen no variará, así que, puesto que la componente de la aceleración normal a la superficie varía con $\cos \varphi$ (tomando como referencia la dirección y sentido de la gravedad), podemos escribir la ecuación linealizada del equilibrio - como

$$\rho_{zz} + \frac{1}{a^2} \rho_{\varphi\varphi} + \frac{1}{a^2} \rho + 2\omega^2 a \rho + \cos \varphi = 0, \quad (52)$$

donde se ha tomado como parámetro de linealización

$$\varepsilon = g, \quad (53)$$

siendo g el valor adimensional de la componente transversal de la aceleración de la gravedad.

La ecuación (52) sugiere el desarrollo

$$\rho = \eta(z) \cdot \cos \varphi, \quad (54)$$

que, introducido en (52) nos da

$$\eta'' + 2\omega^2 a \eta + 1 = 0. \quad (55)$$

Imponiendo la condición de bordes anclados en los discos (la única configuración capaz de soportar cargas transversales), obtenemos la solución

$$\eta = \frac{1}{2\omega^2 a} \left(\frac{\cos[(1-2z)\sqrt{\omega^2 a/2}]}{\cos \sqrt{\omega^2 a/2}} - 1 \right). \quad (56)$$

Nótese que no ha hecho falta imponer la conservación del volumen, por venir implícita en el desarrollo (54).

El valor de la cota máxima de la forma deformada, en ausencia de rotación es

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{1}{8}, \quad (57)$$

y, al igual que en los demás casos, es de destacar la escasa influencia de la rotación en la forma de la superficie libre.

NOTA ANEXA

Una vez finalizada la redacción de este trabajo se han encontrado un par de preguntas sin responder: ¿porqué no se estudia la presión? (apenas si aparece mencionada); ¿qué pasa si los discos soportes son de diámetros diferentes?.

Se ha apuntado a veces la posible utilización de zonas flotantes como medidores de presión relativa en las proximidades del cero (diferencias del orden de un pascal). Creemos que es más sencillo utilizar gotas para ese cometido.

Otros intereses se centran en el estudio de la desviación de la forma de la superficie libre aquí considerada, debido al efecto de las fuerzas moleculares de interacción sólido-líquido en los discos soporte, evaluada en términos de la "presión de separación" (disjoining pressure).

Incluso se ha anunciado ya que se van a hacer experimentos en el espacio con zonas flotantes mantenidas entre dos discos desiguales.

Todas estas consideraciones podrían haber merecido alguna explicación en el texto. Trataremos de suplir aquí esa posible deficiencia con estos dos comentarios:

Presiones: la presión, P_0 , en una zona líquida en ingravidez y sin rotación es uniforme y vale

$$P_0 = P_a + \frac{4\sigma}{(1+m)D_m} \quad -\infty < m < +\infty, \quad (58)$$

siendo P_a la presión de la atmósfera circundante, σ el coeficiente de tensión superficial, m el parámetro que define el tipo de curva (Fig. 1.6), y D_m el diámetro de la zona en el plano medio entre los discos.

Discos desiguales: todas las formas posibles de la superficie libre siguen siendo las de la Fig. 1.6, sólo que el origen (el plano de simetría) ya no está en el plano medio entre los discos, sino más cerca del disco pequeño (el mínimo) o del disco grande (el máximo).

CAPITULO 2

ESTABILIDAD ESTATICA DE LA CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE
UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES

2. ESTABILIDAD ESTATICA DE LA CONFIGURACION DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES.

2.1. INTRODUCCION

Se trata de dar una estimación de la estabilidad de las formas de equilibrio, obtenidas en el capítulo anterior, desde un punto de vista energético (probabilidad) y topológico (posibilidad) de una zona líquida flotante sujeta a las condiciones especificadas en el apartado 1.1. En otras palabras: el planteamiento del equilibrio (apartado 1.2) nos ha conducido a un conjunto de soluciones de entre las cuales tenemos que elegir la "verdadera" imponiendo la condición de "fenómeno natural", es decir, que siendo la solución accesible desde unas condiciones realizables, sea la de menor energía.

El fin que persigue este análisis es el de delimitar - las posibles configuraciones de equilibrio, estableciendo límites de estabilidad estática.

2.2. PLANTEAMIENTO

Empecemos, para no complicar la explicación, limitando estos primeros apartados, al caso de zonas con bordes anclados no sometidas a más acción que la tensión superficial.

El estado de reposo de una zona líquida flotante parece, a primera vista, que puede definirse como función de dos únicas variables adimensionales; tomando como unidad la separación entre los discos, estas variables son:

- el radio de los discos
- el volumen de líquido en la zona.

Desgraciadamente, como ya se indicó en el capítulo anterior (ver Fig. 1.4) existen varias soluciones (en número finito) para el problema así planteado; es decir, la función $y(x,a,v)$ que da la curva generatriz de la superficie libre (de revolución) es multiforme.

El problema que vamos a analizar es el siguiente: para un cierto radio de los discos (impuesto a voluntad) ¿cómo se puede averiguar si existe alguna forma de equilibrio para un volumen dado? Y si existiesen varias posibilidades ¿cómo se podría averiguar cual se presentaría en un ensayo real?.

Los pasos que vamos a dar son, pues: delimitar el margen de volúmenes en los que "existe" configuración de equilibrio, y, dentro de este margen, acotar los valores que conducen a solución estable.

2.3. CAPACIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO

Tomemos, hipotéticamente, una zona cilíndrica de radio a y volumen $v = \pi a^2$. Es intuitivo pensar que si extraemos líquido (por un orificio en un disco), la zona se irá estrangulando y llegará un momento en que se rompa, quedando dividido el líquido en dos partes separadas, una en cada disco. Llamaremos "volumen mínimo" de una zona, al volumen en la situación de rotura antes descrita.

En cambio, no es nada intuitivo el proceso de llenado partiendo de la zona cilíndrica ¿existirá un volumen máximo?. Sí, ya que, al aumentar el volumen, va aumentando el ángulo del líquido en el borde y llegará un momento en que se desborde, mojando la superficie lateral e incluso la parte posterior del disco. Tomaremos como valor máximo de este ángulo, 180° (Fig. 2.1).

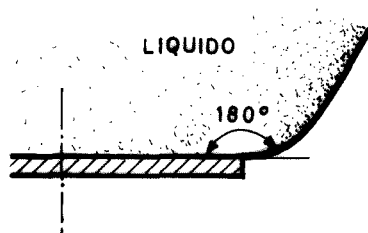


Fig. 2.1. Máximo ángulo considerado para delimitar la capacidad de una zona.

Si en lugar del criterio anterior, se toma el de $\theta_M = 270^\circ$ ó cualquier otro, variaría el valor del volumen máximo, pero manteniendo siempre el mismo comportamiento.

Vemos, pues, que el límite superior del volumen de líquido que puede contener una zona no es difícil de calcular y no presenta particularidades notables, como se verá enseguida.

En cuanto a la limitación inferior (mínimo volumen) el caso es bastante diferente; el límite no viene en general impuesto por condiciones de "impenetrabilidad" (Fig. 2.2) como podría aventurarse basado en la limitación superior antes vista. Esta limitación es sólo válida para zonas muy compactas con ángulo de contacto sólido-líquido-gas nulo.

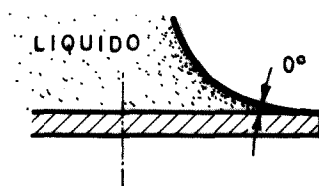


Fig. 2.2. Límite inferior del volumen contenido en una zona compacta de líquido que moja perfectamente.

Para zonas esbeltas el límite inferior no viene impuesto por este condicionante (valor inferior del ángulo en el borde), sino que el volumen pasa por un valor mínimo para un ángulo intermedio. Aún más, no existe solución de equilibrio con ángulos pequeños. En particular, para una relación $D/L = .22$, el volumen mínimo resulta ser el de la forma cilíndrica. Es necesario hacer constar que se trata de un mínimo relativo, ya que, por la periodicidad de las funciones manejadas, las soluciones son múltiples (en número finito) como se esquematiza en la Fig. 2.3.

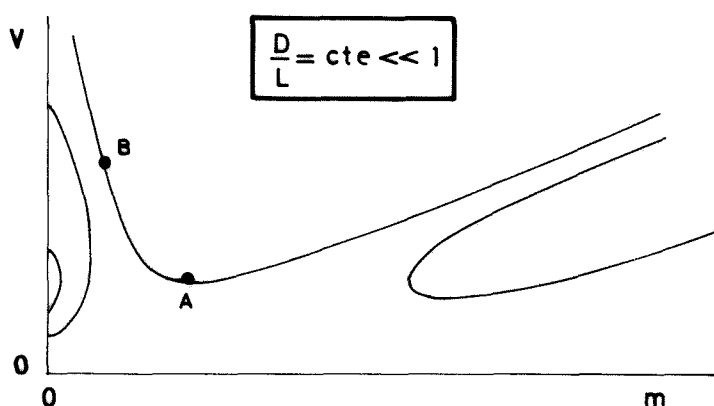


Fig. 2.3. Esquema de los diferentes volúmenes que pueden contener dos discos de diámetro D y separación L , con $D/L \ll 1$, en función del parámetro identificador de la curva meridiana, m . (Ver Fig. 2.5).

Como se demostrará posteriormente al estudiar la estabilidad, las curvas inferiores de la Fig. 2.3, son inaccesibles, por lo que tiene sentido calcular el punto A (Fig. 2.3) y asignarle el valor límite inferior de la capacidad de una zona flotante. Desgraciadamente, para zonas con $D/L < .5$, tampoco es accesible el punto A, pues existe una posición anterior, punto B, que marca el límite de estabilidad para esa esbeltez (en esa zona de valores de m , al ir extrayendo líquido, va aumentando la m).

De todos modos, vamos a calcular los límites superior e inferior analíticamente.

Cálculo del volumen máximo

Basándonos en la condición expresada anteriormente para determinar el volumen máximo, y con ayuda de la Fig. 1.6 y las fórmulas (30), (32) y (34) de la Tabla 1.1 (capítulo anterior) podemos determinar su valor para cada esbeltez. En efecto, la forma de equilibrio de esta situación será del tipo mostrado en la Fig. 2.4, donde se indica, asimismo, su obtención gráfica. Para el cómputo numérico, que no ofrece gran dificultad, hay que considerar la curva (en paramétricas) desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = \arctg \sqrt{-1/\cos \alpha}$, valor en el cual se presenta la tangente vertical (Fig. 1.6, Tabla 1.1-(30) y (32)).

Cálculo del volumen mínimo

Este caso es mucho más complicado, como vamos a ver al

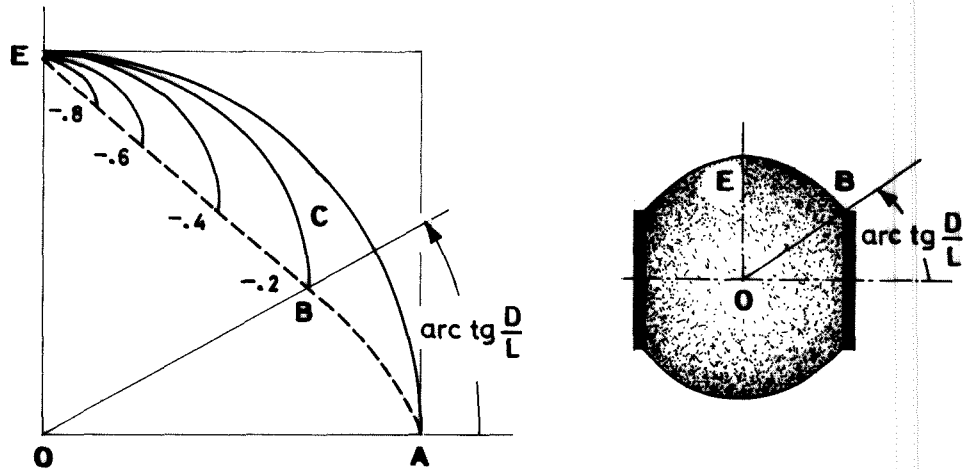


Fig. 2.4. Forma de equilibrio de volumen máximo para una esbeltez dada. La superficie libre de revolución (ECB), simétrica respecto al plano mitad (EO) es la definida por la recta OB de pendiente D/L y la curva ABE que marca la condición de ángulo en el borde $\theta = 180^\circ$.

plantear el problema.

Se desea conocer el valor del volumen mínimo que puede ser mantenido entre dos discos de diámetro D separados una distancia L , y para ello disponemos de las ecuaciones paramétricas reducidas (Tabla 1.1) de todas las posibles formas de la superficie de equilibrio. Llamando con la misma letra φ al valor de la variable en el extremo de la zona, el planteamiento matemático será, para $D/L > .22$, *

$$\frac{D}{L} = \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)} \quad (1)$$

* El hecho de tomar $D/L > .22$ es para utilizar las fórmulas b) de la referida Tabla 1.1 y hacer la explicación más explícita. Para $D/L < .22$ el único cambio reside en tomar las ecuaciones a) de dicha Tabla.

$$\frac{V}{L^3} = v = \frac{v}{4x^3} = \frac{\pi}{12} \{ -\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} -$$

$$- \cos^2 \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) [E(\pi/2, \alpha) -$$

$$- E(\varphi, \alpha)] \} / \{ \cos \alpha [E(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha) \}^{-3}$$

$$d(V/L^3) = 0 \quad . \quad (3)$$

Las condiciones (1) y (3) nos dan dos ecuaciones con dos incógnitas, α y φ , que sustituidas en (2) nos determinan el valor buscado del volumen. El hecho de trabajar con integrales elípticas y que la solución no sea única, introduce una dificultad notable, pero las representaciones gráficas ayudan grandemente (conviene trabajar con los desarrollos polinómicos de las integrales elípticas para evitar los ciclos de iteraciones con integrales de límites variables).

Si en lugar de utilizar la ecuación (1) utilizamos su diferencial,

$$d(D/L) = 0 \quad , \quad (4)$$

obtendremos una relación entre los parámetros α y φ , y las ecuaciones (1) y (2) nos definirán en forma paramétrica la solución general. Para obtener esta relación $J(\alpha, \varphi) = 0$ (esta función se llama J para identificarla con el Jacobiano de las funciones D/L y V/L^3 respecto a las variables α y φ), hay que satisfacer las -

ecuaciones

$$d(D/L) = \frac{\partial(D/L)}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial(D/L)}{\partial\varphi} d\varphi = 0 \quad (5)$$

$$d(V/L^3) = \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\varphi} d\varphi = 0 \quad , \quad (6)$$

con $d\alpha$ y $d\varphi$ no nulos, lo que exige la anulaci3n del Jacobiano

$$J(\alpha, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(D/L)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(D/L)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (7)$$

La generalidad de esta relaci3n, y la comprobaci3n de los c3mputos num3ricos, justifican un an3lisis te3rico aunque - s3lo sea lineal, en particular para zonas casi cil3ndricas: - $\alpha \ll 1$ ($m \approx 1$). En este caso, la condici3n (7) nos da la ecuaci3n trascendente

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\varphi) = \pi - 2\varphi \quad , \quad (8)$$

cuya primera soluci3n es $\varphi = -.676$, lo que conduce a $D/L = .22$ y $V/L^3 = .04$.

La curva de volumen m3nimo, $J(\alpha, \varphi) = 0$, est3 dibujada en la Fig. 2.5, y es la que une los puntos A y B a trazos, B y C a l3nea llena, y contin3a a trazos. Sin embargo, s3lo nos limita el volumen en el tramo BC ($.5 < D/L < 2.5$), ya que para $D/L > 2.5$ aparece un condicionante m3s severo, y es el de "impenetrabilidad"; es decir, la restricci3n de 3ngulo en el borde $\neq 0$ nos da

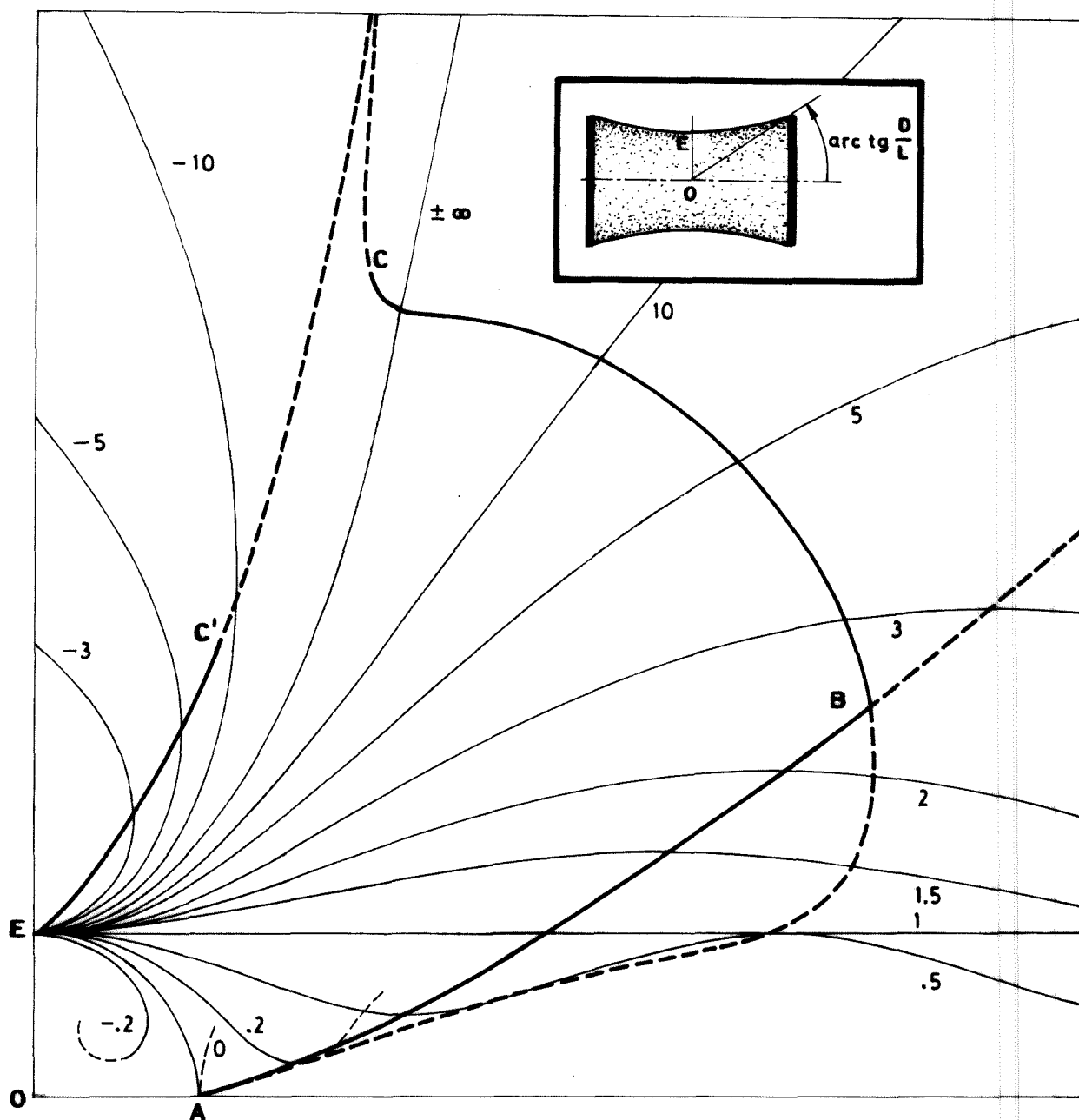


Fig. 2.5. Formas posibles de equilibrio estable de una zona líquida flotante entre dos discos de diámetro D , separados una distancia L . La intersección de una recta que pase por 0 con pendiente D/L y las sucesivas curvas de la figura nos delimita la zona según se indica en el esquema. El volumen va disminuyendo al alejarnos del punto 0 , y el límite estable es el contorno $ABCC'E$.

como lugar geométrico de los bordes la curva EC' (y su continuación a trazos), resultando que para $D/L > 2.5$ se impone esta condición sobre la de "volumen mínimo", que sólo gobierna para $D/L < 2.5$ (la recta $D/L = 2.5$ une los puntos O , C' y C en la Fig. 2.5). Por otra parte, para $D/L < .5$, aparece un nuevo condicionante: la zona se hace inestable, apareciendo una bifurcación hacia formas no simétricas (respecto al plano medio entre discos) que no son estables (se estudiarán posteriormente en este capítulo).

Hay que volver a insistir en que las funciones son multiformes y que la relación de "mínimo volumen" elegida es la correspondiente al primer mínimo relativo, pues las sucesivas formas serían inalcanzables. También hay que recordar que no se ha incluido el efecto del ángulo de contacto sólido-líquido-gas, y que reduciría apreciablemente el valor del volumen máximo de una zona. Para zonas muy compactas ($D/L > 2.5$) el ángulo de contacto marcaría el comienzo del deslizamiento de los bordes al ir extrayendo más y más líquido (Fig. 2.6).

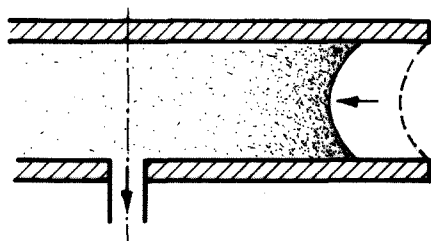


Fig. 2.6. Deslizamiento de la superficie libre hacia el centro al ir extrayendo líquido en una zona compacta.

Como resultado del estudio de la capacidad de una zona flotante en reposo, aunque no se demostrará hasta el apartado siguiente la limitación no simétrica, podemos representar el exceso o defecto de volumen respecto a la posible forma cilíndrica - en función de la esbeltez (Fig. 2.7). El límite superior (exceso sobre el cilindro) es una curva única, pero el límite inferior (defecto sobre el cilindro) presenta tres zonas bien distintas: para zonas muy esbeltas el límite lo marca la inestabilidad antisimétrica (se verá a continuación); en el otro extremo, para zonas muy cortas, el límite viene impuesto porque el líquido abandona el borde del disco y desliza hacia el interior; para esbelteces intermedias el límite es debido a un mínimo local del volumen, como ya se ha visto antes.

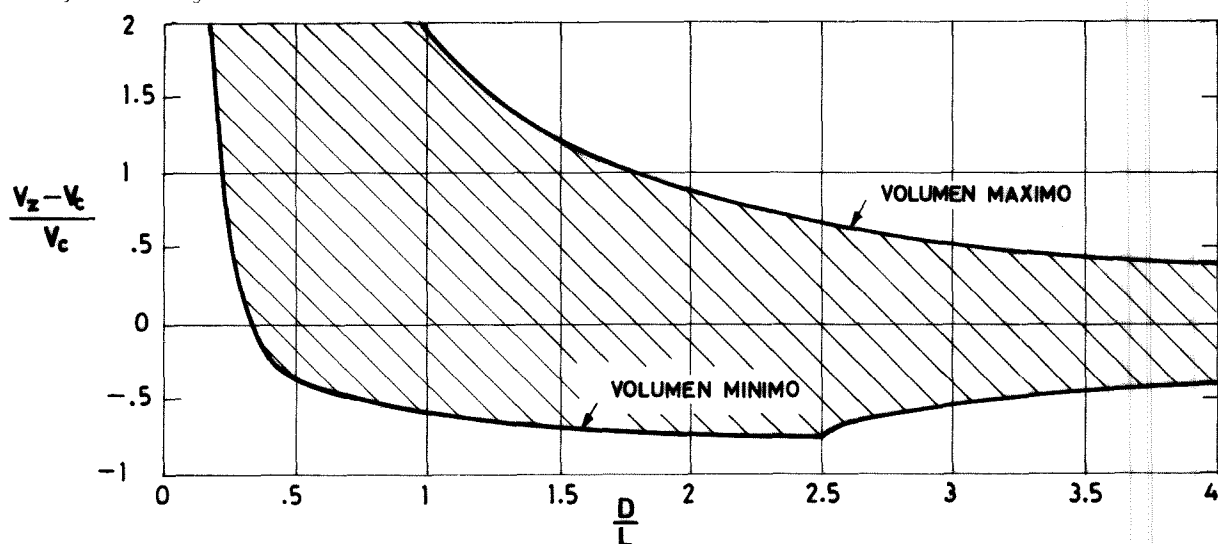


Fig. 2.7. Límites de la capacidad relativa de una zona comprendida entre dos discos de diámetro D , y separación L .

V_z , volumen de la zona líquida

V_c , volumen de la zona cilíndrica ($V = \pi D^2 L / 4$).

2.4. ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO

Empecemos con una explicación básica de lo que vamos a hacer. Sea E la energía total que tendría una zona líquida de volumen V comprendida entre dos discos de diámetro D y separación L supuesta "congelada" (impedido todo movimiento de sus partículas) en una cierta posición que puede ser identificada por un parámetro y_0 (por ejemplo, el radio de la zona en el plano mitad; aunque la explicación es general). En la Fig. 2.8 se esquematiza una representación gráfica de E dentro del margen de y_0 a estudiar.

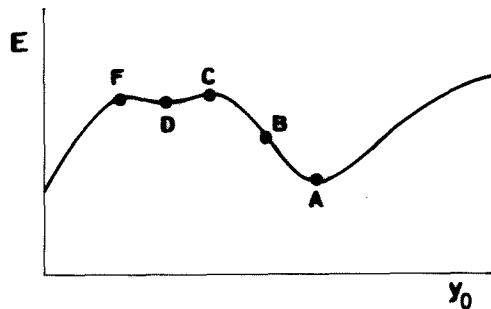


Fig. 2.8. Esquema de la variación de la energía con un parámetro.

A, D, situación de equilibrio estable
 B, situación de desequilibrio
 C, F, situación de equilibrio inestable.

El primer paso en el estudio de un sistema mecánico es la determinación de las situaciones de equilibrio (A, C, F, etc.), para lo cual se impone la condición $dE = 0$ (método variacional, expuesto en 1.2 y 2.6).

El segundo paso es la clasificación de las situaciones de equilibrio en estables (A, D) e inestables (C, F). Para ello, si se conociese la función $E(y_0)$ de la Fig. 2.8, bastaría estudiar -

su derivada segunda y ver si se trata de máximo o mínimo. Pero la función $E(y_0)$ es, en general, demasiado difícil de obtener, y entonces se utilizan uno de los métodos siguientes:

- Método dinámico: se calcula el punto de equilibrio y la forma de la curva en sus proximidades (exige un análisis dinámico, aunque sea lineal).

- Método estático: hace falta calcular por lo menos dos puntos de equilibrio consecutivos para asegurar que el de mayor energía es un máximo y el de menor un mínimo, pero no hace falta entrar en análisis dinámicos.

El tercer paso es la determinación de la configuración que adoptaría el sistema en la realidad, esto es, dentro de las situaciones de equilibrio estable, cual se alcanzaría partiendo de una situación anterior "real". Para hacer más intuitivo el razonamiento, pensemos que la curva $E(y_0)$ de la Fig. 2.8 fuera un alambre plano por el que puede deslizarse una perla sin rozamiento sometida a la acción de la gravedad. Por el análisis del equilibrio obtendríamos los puntos A, C, D, F. Por el análisis de la estabilidad dividiríamos entre estables A, D e inestables C, F. Por el análisis del proceso continuo deduciríamos que si la perla está inicialmente en A (equilibrio estable) nunca podrá quedarse en el punto D pues si lograra superar la cima C se aceleraría tanto en su bajada CD que traspasaría la cima F y escaparía del pozo D (incluso suponiendo un ligero rozamiento).

Volvamos a las zonas líquidas flotantes. En el Cap. 1

se obtuvieron las formas de equilibrio. Como se conocen puntos consecutivos (los sucesivos puntos de corte con un mismo volumen v en la Fig. 2.3) es muy fácil distinguir entre configuraciones de equilibrio estable y de inestable. Vamos pues a estudiar un proceso continuo (llenado, vaciado, estirado, etc.) para deducir la configuración que se dará en la realidad. Podríamos decir que se trata de analizar la sucesión de curvas $E(y_0, v)$ de la Fig. 2.9, donde v es el parámetro que estamos variando en este proceso continuo (piénsese por ejemplo en la extracción de volumen de una zona de esbeltez dada).

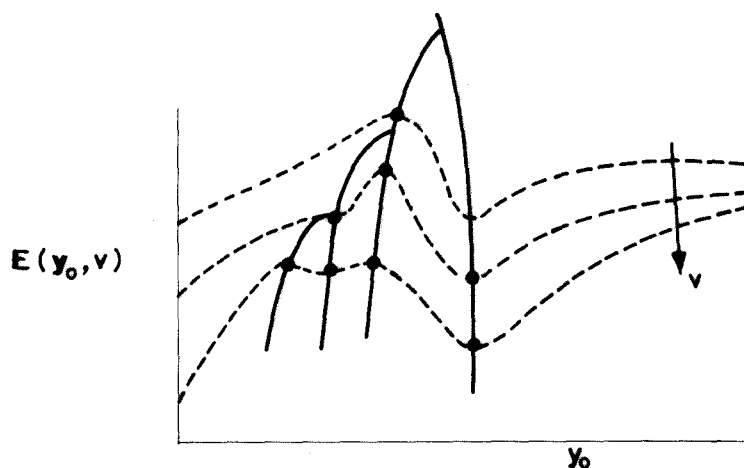


Fig. 2.9. Esquema de la ramificación de las soluciones de equilibrio

- Puntos de equilibrio
- Curvas de la variación de la energía para cualquier configuración de equilibrio o desequilibrio (Fig. 2.8)
- Evolución continua en el proceso casi estacionario.

Como muestra la Fig. 2.9, aparecen ramificaciones en las curvas que unen las sucesivas situaciones de equilibrio (úni

cos puntos conocidos, pues para todos los demás de las curvas $E(y_0, v)$ sería necesario el análisis dinámico). Para saber por qué rama seguiría el sistema en la realidad hay que estudiar el problema de bifurcación correspondiente. Primero se determinaría el punto de bifurcación y luego se estudiarían las configuraciones próximas.

Consideremos aún con más detalle el comportamiento de las zonas líquidas flotantes. En la Fig. 2.10 se ha dibujado el diagrama energía-volumen para diferentes esbelteces. Supongamos que nuestros discos tienen un diámetro D y separación L (fijos) tal que $D/L = .7$ para fijarnos en una curva particular. Supongamos que inicialmente el volumen adimensional es $V/L^3 = .3$ y admitamos que la zona está en equilibrio estable y por tanto en el punto $(.3, .28)$ del diagrama. Ahora, manteniendo la esbeltez constante ($D/L = .7$), vamos extrayendo líquido en un proceso continuo (a través de un orificio en un disco) con la suficiente lentitud como para que se trate de una sucesión de estados de equilibrio; nos estaremos moviendo hacia la izquierda por la curva $D/L = .7$ en la Fig. 2.10. Para cada volumen, la configuración podría ser distinta a la considerada (corte superior de la curva $D/L = .7$ con la recta $V/L^3 = \text{cte}$), pero esa otra solución es inestable y no se presentará en la realidad. Resulta evidente que si seguimos extrayendo líquido, cuando sea $V/L^3 = .18$ la zona se romperá. Podríamos pensar que pasase a una nueva forma sin necesidad de "romperse" - en el sentido estricto de separarse en dos gotas, una en cada dis

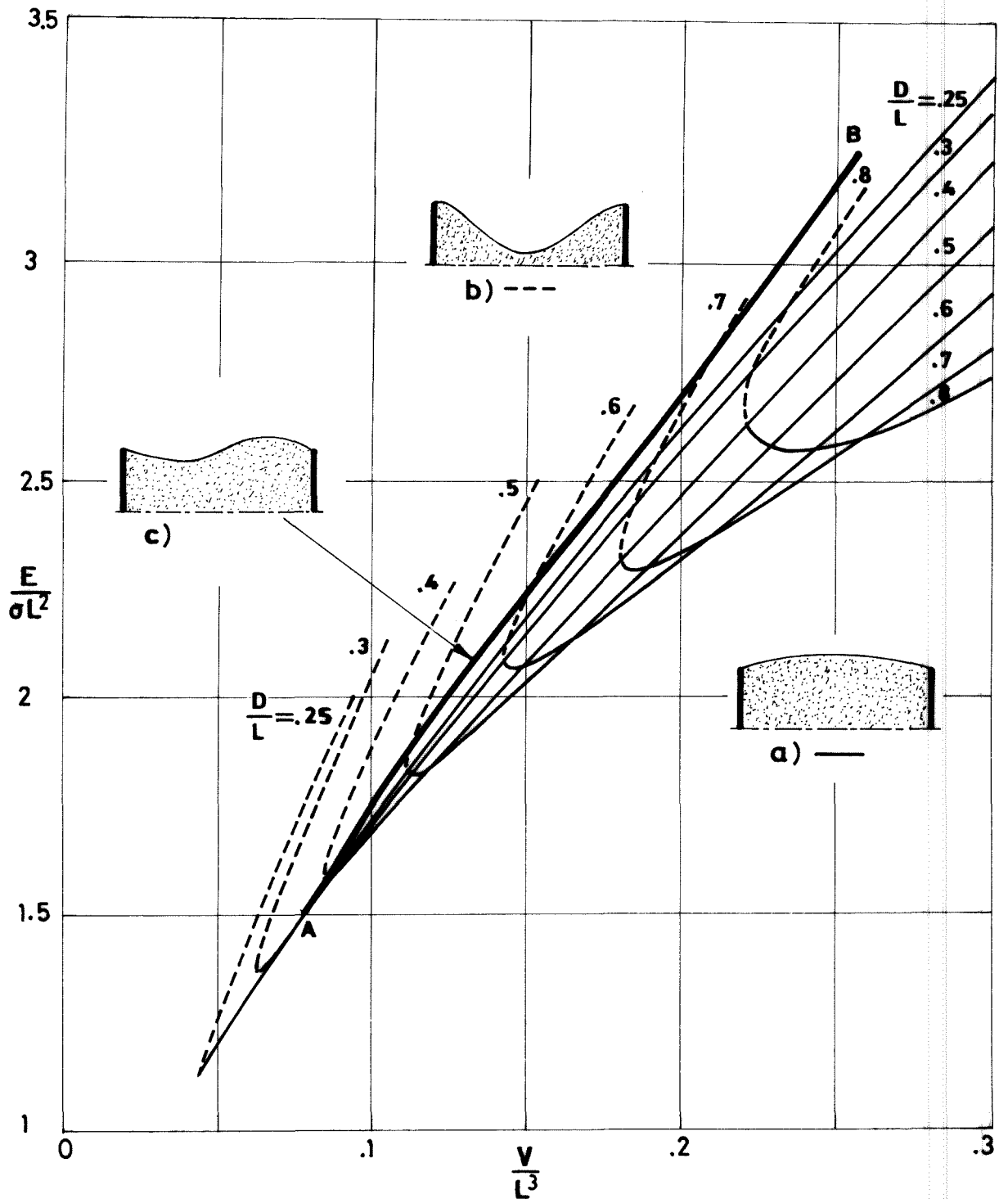


Fig. 2.10. Energía en función del volumen para esbeltez constante.

A-B, zonas no simétricas (un periodo completo)
 a) , zona inicial. Se extrae líquido hasta que rompe
 b) , rotura simétrica (el volumen pasa por un mínimo)
 c) , rotura no simétrica (pérdida de la estabilidad)

co. Nos puede mover a este supuesto el hecho de que existe una configuración no simétrica de equilibrio con ese mismo volumen. Sí, en realidad, para cada volumen hay tres soluciones (en este margen de energías): dos son las ya explicadas anteriormente (intersección de $V/L^3 = \text{cte}$ con la curva $D/L = .7$) y la otra es una configuración no simétrica del tipo esquematizado en la Fig. 2.10-c), pero, como se verá más tarde, también es inestable (para $D/L = .7$).

Sin embargo, para $D/L < .5$ (por ejemplo la curva $D/L = .4$) en el proceso de vaciado de la zona se llega antes al corte con la curva AB (Fig. 2.10) de las formas no simétricas que al punto de volumen mínimo, reduciéndose más aún el límite de estabilidad (se rompe antes). Para demostrarlo hemos de hacer un estudio de las proximidades del punto de bifurcación. Para ello, dibujemos los puntos de equilibrio de una zona de esbeltez $D/L = .4$ un poco antes de la bifurcación $V/L^3 = .090$ y un poco después de la bifurcación $V/L^3 = .085$; como variable de definición de la forma de la zona elegimos el ángulo de contacto en el borde (ver Fig. 2.11).

Se observa en la Fig. 2.11 que el "valle" de la solución estable (que es simétrica respecto al plano mitad) está contenido entre las cumbres de la solución no simétrica (que es inestable). En el punto 0 las cumbres se juntan y ya no dan cabida a ese valle, por lo que el equilibrio se hace inestable y la zona se rompe en dos "gotas" (casquetes esféricos) desiguales; para determinar el tamaño de cada gota sería preciso resolver todo el problema dinámico de la rotura.

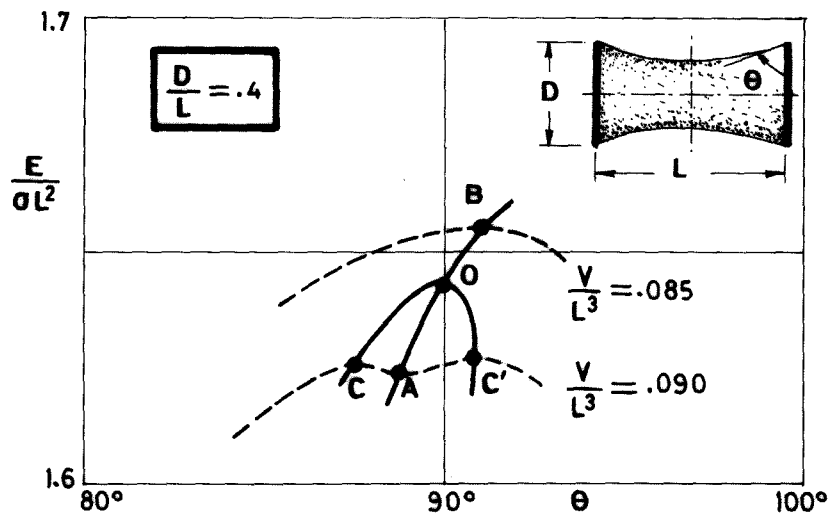


Fig. 2.11. Diagrama de los puntos de equilibrio en las proximidades de un punto de bifurcación

- , puntos de equilibrio
- , sucesión de estados de equilibrio
- AO , extracción estable (simétrica)
- C'O, CO , soluciones no simétricas (inestables)
- OB , solución simétrica inestable
- O , punto de rotura.

Así pues, para zonas muy esbeltas, el límite de estabilidad viene marcado por la condición de que la forma de equilibrio sea un ciclo completo de las superficies de revolución de curvatura constante (véase la Fig. 2.5). La importancia que tiene el estudio de la estabilidad de las zonas casi cilíndricas aconseja disponer de un gráfico que pueda usarse directamente sin necesidad de cálculos adicionales, tal como el dibujado en la Fig. 2.12. Supongamos que queremos observar la rotura de una zona cilíndrica (punto C). Podremos partir de una forma cilíndrica de $L/D = 2.5$, $V/D^3 = 2$ y seguir por la curva de trazos hasta C. Sin embargo, parece más sencillo partir de una forma más rellena pero ya con $L/D = \pi$ para que sólo haya que extraer líquido sin mover -

las placas; o todavía mejor, partir de $L/D = 2.5$ con $V/D^3 = 2.5$ y, a volumen fijo, separar las placas hasta llegar a $L/D = \pi$. En la Fig. 2.13 se da una relación que puede ser usada como "avisador" directo (basta una comparación del diámetro en el centro con el de los discos para saber si está próxima la rotura).

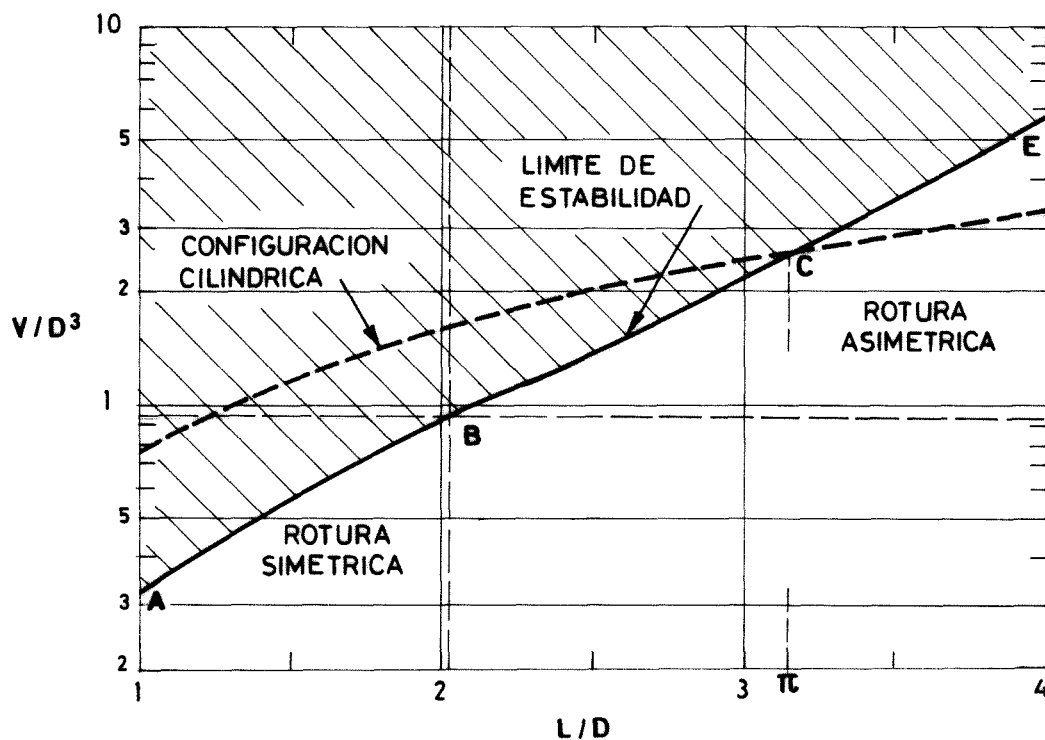


Fig. 2.12. Límite de estabilidad de una zona líquida comprendida entre dos discos de diámetro D , separados una distancia L .
 Proceso de vaciado de una zona (verticales)
 Proceso de estirado de una zona (horizontales)
 A-B, rotura simétrica tras pasar por la forma cilíndrica
 B-C, rotura asimétrica tras pasar por la forma cilíndrica
 C-E, rotura asimétrica antes de alcanzarse la forma cilíndrica.

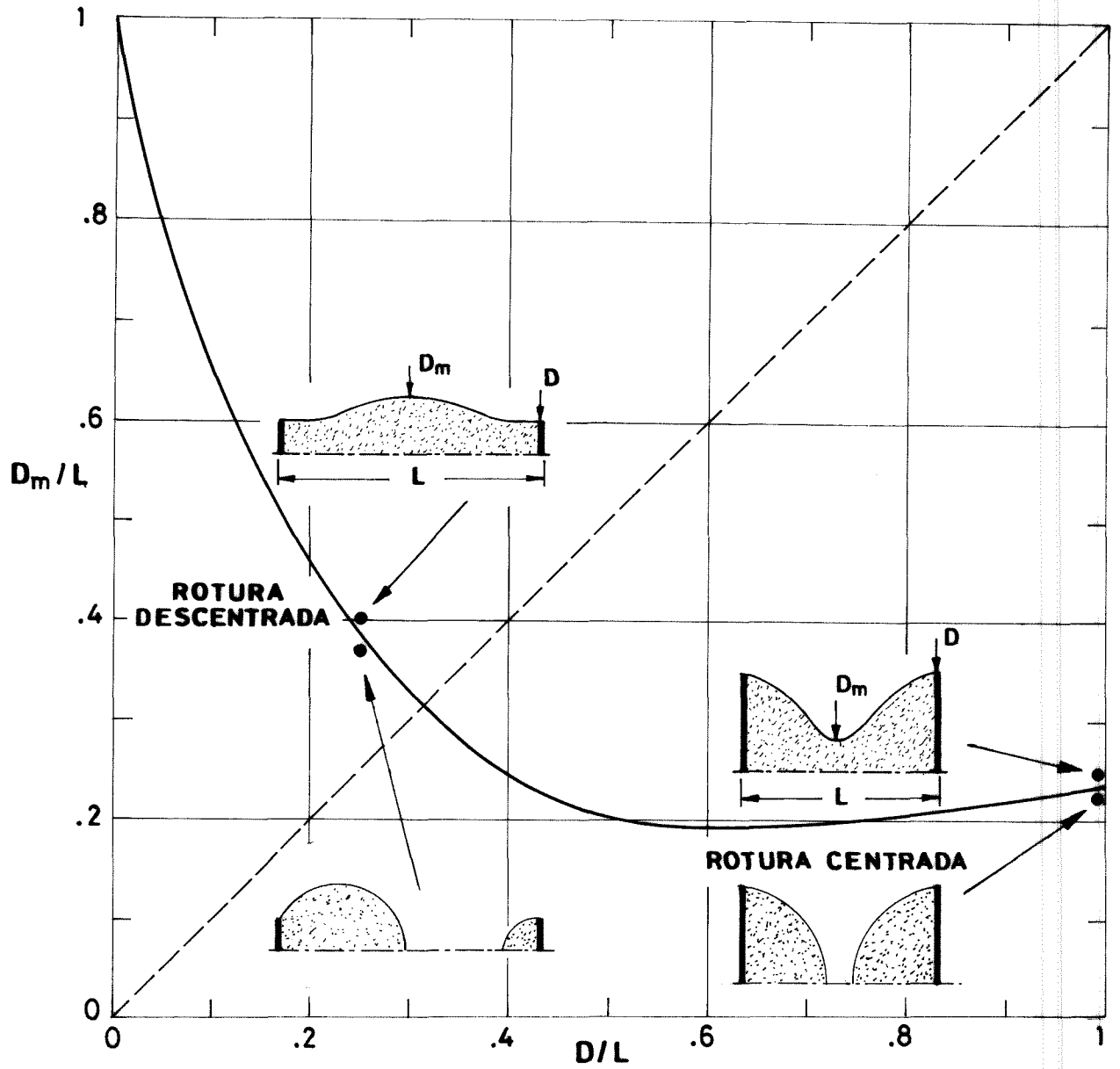


Fig. 2.13. Diámetro mínimo adimensional de una zona líquida flotante en función del diámetro de los discos soporte (volumen mínimo es table). Se han incluido dos ejemplos de rotura (para $D/L = .25$ y $D/L = 1$).

2.5. PUNTUALIZACIONES SOBRE CIERTOS CASOS PARTICULARES

Durante todo el análisis que hemos hecho hasta aquí en este capítulo sobre la estabilidad nos hemos limitado a considerar como variables "directamente controlables" la separación entre los discos (que con el diámetro nos definiría la esbeltez), y el volumen de líquido contenido. Esta limitación no tiene nada de restrictiva, y una vez obtenida la curva de rotura de la Fig. 2.12 (por ejemplo), si en lugar de querer mantener un volumen fijo e ir separando los discos, o bien fijar la separación e ir extrayendo, estamos interesados en ir separando y extrayendo a la vez bajo una ley cualquiera $f(L,V) = 0$, no tenemos más que dibujar esa función y ver donde corta a la curva de rotura. Por ejemplo, si $f(L,V) = V - \pi D^2 L/4 = 0$ (sucesión de configuraciones cilíndricas), la zona se romperá al llegar al punto C (Fig. 2.12).

Este análisis de la estabilidad de zonas "condicionadas", pese a no ser el más intuitivo, es el más antiguo, y ya a finales del siglo pasado Lord Rayleigh dedujo el punto C de la Fig. 2.12 haciendo un estudio dinámico lineal de un "chorro" cilíndrico flotante.

Desgraciadamente, estas analogías de las zonas líquidas contenidas entre dos discos con los chorros flotantes y con las películas de jabón, hay que tomarlas con cierta precaución. Por ejemplo, viene siendo usual en la literatura sobre zonas flotantes el error de asignarle el mismo valor del límite de estabilidad a las formas catenoides de películas de jabón y zonas flotan

tes, sin percatarse de que la energía está en un caso contenida en la superficie y en el otro dividida entre la superficie y el volumen, y que, una forma próxima que tuviese más energía de superficie, podría tener aún menor energía de volumen y seguir siendo estable.

En la Fig. 2.14 se ha dibujado la curva de rotura de zonas casi catenoides. La sucesión de catenoides es la curva $m = \pm \infty$, en la que se encuentran los puntos H, H' y H'' que vamos a comentar. Si, mediante un regulador (manual o automático) consiguiésemos una sucesión de catenoides, partiendo por ejemplo de la de $D/L = 1.6$, $V/L^3 = 1.4$, iríamos bajando por la curva $m = \pm \infty$ disminuyendo el volumen y aumentando ligeramente la separación entre los discos hasta un valor máximo (punto H). Es en este punto donde se suele considerar el límite de estabilidad, argumentando que si se separasen más los discos la zona se rompería, al no existir ulteriores soluciones catenoides. El quid reside en esta última frase, ya que lo que en realidad ocurrirá es que la zona ya no podrá tener forma catenoide, que es bien distinto del hecho de romperse. Además, los que mantienen este criterio erróneo no hacen buen uso de sus hipótesis, pues, si se habían propuesto estudiar las sucesivas configuraciones catenoides lo que debían es de seguir por la curva H H' H'' y no querer estirar aún más al llegar al punto H. Para una mejor comprensión del fenómeno, hemos dibujado aparte la curva de las catenoides en variables de control directo (discos de diámetro fijo D, separación variable L y volu

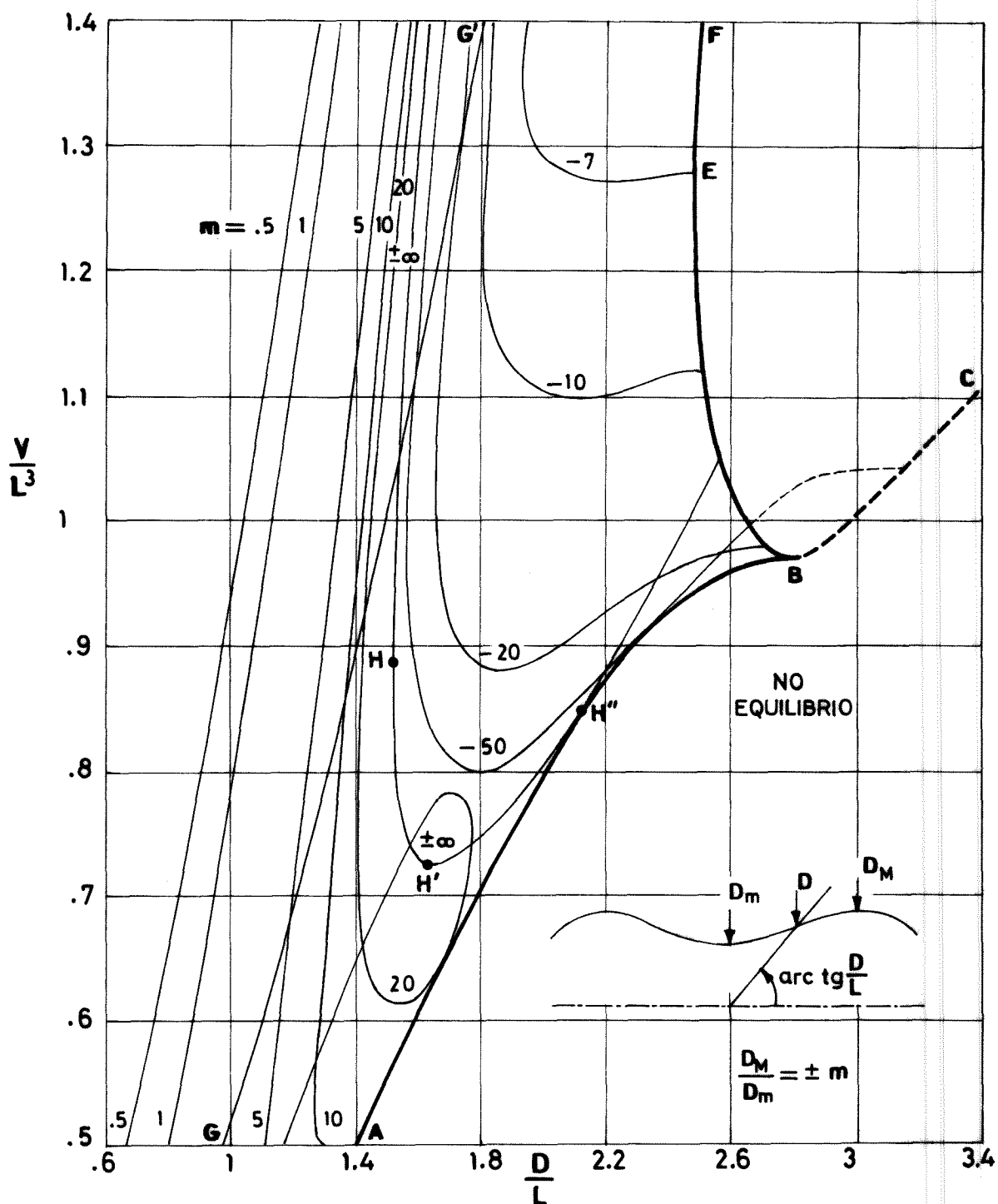


Fig. 2.14. Sucesivas configuraciones que adoptaría una zona líquida regulando la inyección y el estirado para que la forma de la superficie libre sea parte de una misma familia (m). La curva G'G (esfera) es la "continuación" de la H H' H'' (catenoide). El límite de estabilidad es AH''BEF, estando compuesto por la curva del volumen mínimo AH''B, y la de ángulo nulo en el borde, CBEF.

men variable V), Fig.2.15. (los puntos H y H'' de dichas figuras se corresponden; no así los H' y H''').

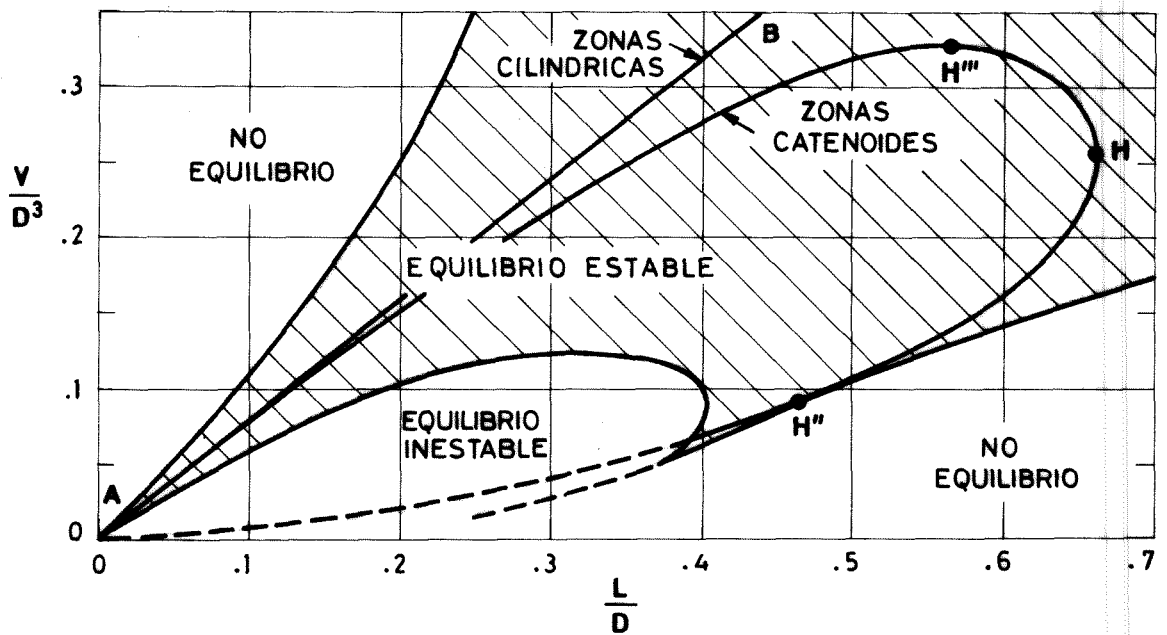


Fig. 2.15. Volumen de líquido contenido entre dos discos de diámetro fijo, D , en función de la distancia entre ellos L , para la sucesión de formas catenoides, $A \rightarrow H''' \rightarrow H \rightarrow H''$.
 H'' , punto de rotura
 AB , sucesión de formas cilíndricas.

Supongamos que se trata de discos de 6 cm. de diámetro. Tras un delicado proceso de llenado (por ejemplo, juntando los discos e inyectando líquido a través de un orificio en uno de los discos a la vez que se van separando), llegamos por ejemplo a una forma catenoide con 60.5 c.c. de líquido cuando la separación es de 2.4 cm.. Si queremos que las sucesivas formas sean también -

catenoides y seguimos separando los discos, habrá que ir introduciendo más líquido, hasta una separación de 3.4 cm. a partir de la cual, si seguimos separando, hemos de ir extrayendo líquido. Al llegar a una distancia de 4 cm. de separación entre los discos (el volumen en ese momento es de 56 c.c.) la zona no se rompe (en la literatura se decía que sí), sino que ya no se pueden separar más los discos y a la vez seguir con configuraciones catenoides. Lo que hay que hacer si se quiere seguir generando formas catenoides es disminuir la separación a ir extrayendo líquido simultáneamente, hasta que, ahora sí, al llegar al punto H" (Fig. 2.15), la zona se rompería en dos mitades iguales, quedando, tras un proceso transitorio disipativo, en forma de dos casquetes esféricos de 9.7 c.c. de volumen. Pero, pese a este límite, todavía se pueden obtener zonas catenoides más angostas, aunque no mediante el proceso que se acaba de exponer, sino extrayendo líquido de una zona con $.38 < L/D < .47$ como se puede apreciar en la Fig. 2.15.

Antes de seguir es preciso justificar todo este detalle con que se presenta el estudio de las zonas líquidas de forma catenoide. Como se sabe, con esta forma de la zona el líquido está a la presión de la atmósfera externa. Esta propiedad parece ser importante para ciertos estudios experimentales que intentan establecer una correlación entre fuerzas moleculares de largo alcance de van der Waals (disjoining pressure) y la separación de la forma real de una zona flotante respecto a estas "formas puras" que se han tratado en este trabajo (nodoides y onduloides de Plateau).

Además, por ser la catenoide una superficie de tratamiento matemático elemental, puede resultar provechoso para contrastar las teorías con los experimentos.

Hasta aquí, todas las discusiones sobre los límites de estabilidad se han hecho partiendo de un análisis global, reflejado por ejemplo en la Fig. 2.5. Ahora vamos a estudiar los dos casos particulares más importantes, cilindro y catenoide, independientemente y desde un principio. Queremos con ello dar una visión concisa de un punto particularmente importante, y mostrar un camino alternativo y elegante de llegar al mismo resultado.

Límite de estabilidad de las zonas cilíndricas en reposo

Planteamos aquí el problema en los términos siguientes: buscamos una función $y(x)$ definida, continua y derivable en el intervalo $-1/2 \leq x \leq 1/2$, donde debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + p = 0 \quad , \quad (9)$$

y cumplir las condiciones

$$y(\pm \frac{1}{2}) = a \quad (10)$$

$$\pi \int_{-1/2}^{1/2} y^2 dx = v \quad , \quad (11)$$

siendo p una constante a determinar en el proceso de resolución - pero que no figura explícitamente en la solución, que será una -

cierta función de los dos parámetros independientes \underline{a} y \underline{v} fijados a priori: $y(x, a, v)$.

Sabemos que, para que la zona sea cilíndrica, el volumen ha de estar relacionado con la esbeltez en la forma $v = \pi a^2$. La solución será entonces $y(x) = a$. Sabemos también (por intuición) que existen múltiples configuraciones con esa relación volumen-esbeltez, en forma de dos casquetes esféricos uno en cada disco, pero no estamos interesados en zonas rotas. En cambio, sí estamos interesados en saber si existen soluciones distintas de "la trivial" (la cilíndrica). En particular, queremos saber si hay alguna otra solución en las "proximidades" de la forma cilíndrica. Se trata pues de un problema típico de bifurcación. Llamemos $\underline{\varepsilon}$ a una cantidad pequeña que esté relacionada con la desviación de la forma respecto al cilindro (por ejemplo la separación del ángulo en el borde respecto a los 90° del cilindro, o el valor relativo del radio máximo). La solución esperada, $y(x, a, \varepsilon)$ (con $v = \pi a^2$) puede desarrollarse en potencias de ε ,

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2) \quad , \quad (12)$$

donde la y_0 es constante ($y_0 = a$). Asimismo, el parámetro interno podrá ponerse como

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2) \quad , \quad (13)$$

con lo que las ecuaciones (9), (10) y (11) pasan a la forma desarrollada

$$\frac{-1}{y_0} + p_0 + \varepsilon \left[y_1'' + \frac{1}{y_0^2} y_1 + p_1 \right] + 0(\varepsilon^2) = 0 \quad (14)$$

$$y_0 - a + \varepsilon y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) + 0(\varepsilon^2) = 0 \quad , \quad (15)$$

$$\pi y_0^2 - v + \varepsilon 2\pi y_0 \int_{-1/2}^{1/2} y_1 dx + 0(\varepsilon^2) = 0 \quad . \quad (16)$$

El término lineal, que nos dará la situación del punto de bifurcación, quedará, una vez sustituida y_0 por a ,

$$y_1'' + \frac{1}{a^2} y_1 + p_1 = 0 \quad (17)$$

$$y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} y_1 dx = 0 \quad . \quad (19)$$

Al imponer a la solución de (17) las tres condiciones (18) y (19) se obtiene un sistema homogéneo de tres ecuaciones para la determinación de las dos constantes de integración de (17) y la p_1 . Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \frac{1}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2a} - \cos \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \cos \frac{1}{2a} & -a \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (20)$$

ha de anularse en el punto de bifurcación. Las sucesivas soluciones, ordenadas de mayor a menor \underline{a} , son

$$a = \frac{1}{2\pi}, .11, \frac{1}{4\pi}, .05, \dots \quad (21)$$

Tomando el primer valor como único significativo, concluimos que las zonas cilíndricas presentan una bifurcación para $L/D = \pi$, valores que coincide con el encontrado por Rayleigh para la longitud de onda inestable de las perturbaciones en un chorro libre [4].

El análisis lineal no nos da la amplitud de la deformada, sino que se limita a darnos la situación del punto de bifurcación y el tipo de deformación, en nuestro caso senoidal. Si quisiéramos estudiar la amplitud en las proximidades del punto de bifurcación, resolveríamos el problema de segundo orden del desarrollo (14)-(15)-(16) que no presenta gran dificultad, y, puesto que se trata de un caso particular de la solución general dada en el apartado 2.4, nos limitamos a dar el resultado:

$$y = a + 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt{a - a_{cr}} \sin \frac{x}{a}, \quad (22)$$

donde a_{cr} es el valor de \underline{a} en el punto de bifurcación. Aunque este resultado nos parece ahora sencillo de interpretar (Fig. 2.16), cuando se obtuvo (cronológicamente anterior al análisis general presentado en 2.4) resultó sorprendente el hecho de que la bifurcación fuese "hacia atrás", es decir, hacia $a > a_{cr}$.

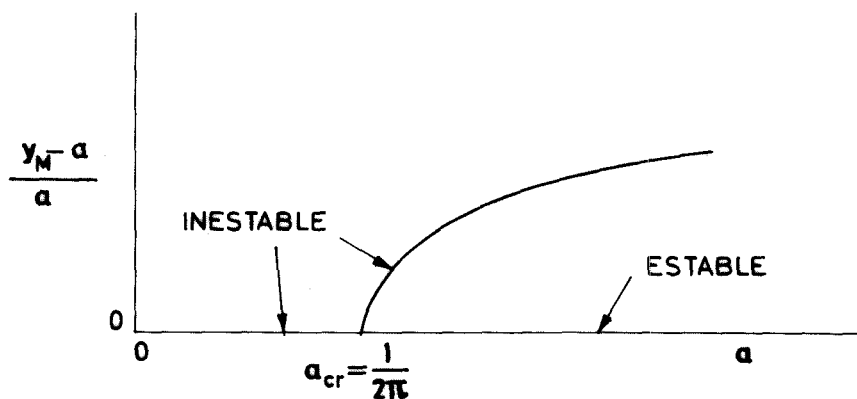


Fig. 2.16. Bifurcación de las zonas cilíndricas.

Límite de estabilidad de las zonas catenoides

Analogamente a como se ha hecho para las formas cilíndricas, vamos a detallar aquí el problema de la estabilidad de la forma catenoide. Las ecuaciones son las mismas: (9), (10) y (11), pero la relación entre los parámetros \underline{a} y \underline{v} ya no es $v = \pi a^2$ sino $v = v(a)$ definida en paramétricas como

$$a = \frac{\text{Ch } \frac{b}{2}}{b} \quad v = \frac{\pi}{2} \frac{b + \text{Sh} b}{b^3} \quad (23)$$

Hacemos el mismo desarrollo (12) y (13), pero la y_0 ya no es constante sino que vale

$$y_0 = \frac{\text{Ch} b x}{b} \quad , \quad (24)$$

y el problema desarrollado pasa a ser

$$p_0 + \epsilon \left[\frac{1}{\text{Ch}^3 b x} y_1'' - \frac{2b \text{Sh} b x}{\text{Ch}^4 b x} y_1' + \frac{b^2}{\text{Ch}^3 b x} y_1 + p_1 \right] + O(\epsilon^2) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\text{Ch } \frac{b}{2}}{b} - a + \epsilon y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) + 0(\epsilon^2) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{b + \text{Sh}b}{b^3} - v + \epsilon \frac{2\pi}{b} \int_{-1/2}^{1/2} y_1 \text{Ch}bx \, dx + 0(\epsilon^2) = 0 \quad (27)$$

Es decir, el término lineal es

$$y_1'' - 2b \, \text{th}bx \, y_1' + b^2 y_1 + p_1 \text{Ch}^3bx = 0 \quad (28)$$

$$y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (29)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} y_1 \text{Ch}bx \, dx = 0 \quad (30)$$

Imponiendo las condiciones (29) y (30) en la solución de (28) obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe anularse si existe una solución distinta de la catenoide. Esta condición nos da el valor del parámetro en el punto de bifurcación, resultando ser

$$b_{cr} = 1.12 \implies \begin{cases} a = 1.06 \\ v = .85 \end{cases} \quad (31)$$

Quisiéramos comentar la extrañeza que supuso la obtención de este resultado cuando, según las publicaciones consultadas, se esperaba obtener $b_{cr} = 2.4$ ($L/D = .67$). Como ya hemos dis-

cutido anteriormente, este último valor, válido para películas de jabón apoyadas en dos anillos que pueden separarse a voluntad, no es de aplicación a las zonas líquidas flotantes.

Finalmente, conviene aclarar que, aunque la sencillez de las ecuaciones diferenciales del tipo (28) que se obtienen en el desarrollo lineal de la ecuación diferencial (9) no requiere sofisticados métodos de resolución, existe un camino muy elegante para la obtención de las soluciones de (28) que se obtiene en la teoría del cálculo de variaciones como se expone a continuación.

2.6. FORMULACION VARIACIONAL DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE: CASO GENERAL.

Como decíamos en el apartado 1.2, podemos construir una función ϕ en la forma

$$\int_{-1/2}^{1/2} \phi \, dx = \frac{T-U}{\sigma L^2} + \lambda \frac{V}{L^3} \quad , \quad (32)$$

siendo T la energía cinética (si la zona gira), U la energía potencial (debida a la energía superficial y a la del campo gravitatorio), V el volumen de líquido en la zona, y λ un multiplicador de Lagrange. T, U , y V dependen solamente de x, y e y' (forma de la superficie). La solución será tal que dé un valor extremal a la integral (32), por lo que habrá de cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0 \quad . \quad (33)$$

De esta ecuación diferencial sacamos las formas de las soluciones de equilibrio. Por ejemplo, para zonas en reposo, la ecuación de Euler nos da la (9). Si ahora buscamos las soluciones próximas a una dada y sustituimos el desarrollo (12) en (33) obtenemos una ecuación tal como la (28) para la aproximación lineal, cuya homogénea es la ecuación de Jacobi,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} y_1' \right) + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y'} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] y_1 = 0 \quad . \quad (34)$$

Esta ecuación es en realidad la ecuación en las variaciones correspondiente a la ecuación de Euler. Pues bien, dada una familia de soluciones de equilibrio dependiente de dos parámetros, la derivación parcial respecto a cada uno de ellos nos da un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación de Jacobi.

2.7. EFFECTO DE LA ROTACION SOBRE LA ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS

Es interesante, desde un punto de vista teórico, el análisis del efecto de un campo radial uniforme de fuerzas másicas sobre la estabilidad de una zona líquida cilíndrica. Por una parte, cualquier perturbación axilsimétrica será amplificada por el centrifugado, que tenderá a hinchar una parte de la columna a expensas de la otra. Por otra, surge un nuevo modo de bifurcación, el no axilsimétrico, que no se había tomado en consideración has

ta ahora porque sin rotación las perturbaciones no axilsimétricas (de pequeña amplitud) son estables. Este último efecto se suele conocer con el nombre de "modo C" o en comba.

La forma cilíndrica es la única que coincide con rotación y sin ella. Las demás (onduloides, catenoide, esfera, y no-doides) sólo son válidas sin rotación, la solución nos lleva a integrales hiperelípticas. No parece justificado un análisis de estas nuevas formas con rotación, porque no introducen ningún comportamiento esencialmente nuevo de las funciones solución; simplemente decir que la forma de la superficie libre depende muy poco de la velocidad de rotación, que lo único importante que hace es adelantar la rotura, como se va a ver ahora con el caso de mayor importancia: las zonas cilíndricas.

Sea una zona líquida de forma cilíndrica anclada en los bordes de dos discos del mismo diámetro (el considerar otras condiciones ideales de mojado no es difícil, pero tampoco pensamos que sea importante, por su poca realidad física).

Vamos a hacer un estudio variacional tal como el indicado en el apartado anterior, ciñéndonos al análisis lineal respecto a la forma cilíndrica $r = a$ (hemos cambiado a coordenadas cilíndricas por costumbre, aunque con ello aumentamos la cantidad de símbolos).

Sea $r(\theta, z)$ la ecuación de la superficie de una masa líquida casi cilíndrica,

$$r(\theta, z) = a[1 + \epsilon \eta(\theta, z)] = a \left[1 + \epsilon \sum \sum A_{mn} \sin m\theta \sin n\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right] . \quad (35)$$

En el análisis lineal podemos desacoplar los modos de deformación y tomar simplemente

$$\eta(\theta, z) = A \sin m\theta \sin n\pi(z + \frac{1}{2}) \quad . \quad (36)$$

Sean T, U y V la energía cinética, la energía potencial y el volumen de dicha zona. Operando en variables adimensionales, tendremos

$$\frac{T}{\sigma L^2} = \iiint \omega^2 r^3 dr d\theta dz = \iint \frac{\omega^2 a^4}{4} (1 + 4\epsilon\eta + 6\epsilon^2\eta^2) d\theta dz \quad (37)^*$$

$$\frac{U}{\sigma L^2} = \iint r \sqrt{1 + (\frac{r_\theta}{r})^2 + r_z^2} d\theta dz = \iint a [1 + \epsilon\eta - \frac{\epsilon^2}{2} (\eta \eta_{\theta\theta} + a^2 \eta \eta_{zz})] d\theta dz \quad (39)$$

$$\frac{V}{L^3} = \iiint r dr d\theta dz = \iint \frac{a^2}{2} (1 + 2\epsilon\eta + \epsilon^2\eta^2) d\theta dz \quad . \quad (40)$$

Formamos la función de Euler ϕ definida en (32) y que ahora es función del parámetro pequeño ϵ .

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon) = & \frac{\omega^2 a^4}{a} - a + \lambda \frac{a^2}{2} + \epsilon (\omega^2 a^4 \eta - a\eta + \lambda a^2 \eta) + \\ & + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \omega^2 a^4 \eta^2 + \frac{a}{2} (\eta \eta_{\theta\theta} + a^2 \eta \eta_{zz}) + \lambda \frac{a^2}{2} \eta^2 \right] \quad . \end{aligned} \quad (41)$$

La condición de equilibrio será

$$\frac{d\phi}{d\epsilon} = 0 \quad \implies \quad \omega^2 a^2 - \frac{1}{a} + \lambda = 0 \quad , \quad (42)$$

* $\omega = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma}}$ (véase 1.2).

que no es otra más que la relación que hay entre la presión en el eje (que coincide aquí con λ) y las características de la zona: - esbeltez y giro. La Fig. 2.17 muestra esta relación.

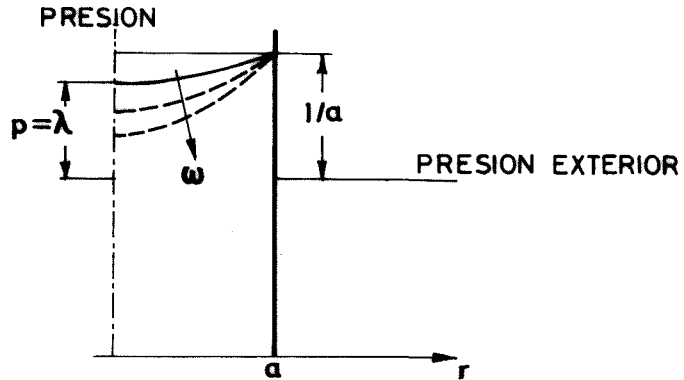


Fig. 2.17. Perfil de presiones en función de la coordenada radial para una zona cilíndrica de radio \underline{a} y velocidad de rotación $\underline{\omega}$ (adimensionales).

El punto de bifurcación nos vendrá dado por la condición de extremal de las soluciones de equilibrio (mínimo \underline{a} de - (42)).

$$\frac{d^2 \phi}{d\epsilon^2} = 0 \implies 3\omega^2 \underline{a}^3 + \frac{\eta_{\theta\theta}}{\eta} + \underline{a}^2 \frac{\eta_{zz}}{\eta} + \lambda \underline{a} = 0, \quad (43)$$

que, haciendo uso de (42) y de (36), se convierte en

$$2\omega^2 \underline{a}^3 - m^2 - \underline{a}^2 \pi^2 n^2 + 1 = 0. \quad (44)$$

Este resultado lo vamos a pasar a variables dimensionales en dos formas distintas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{longitud máxima para } \underline{ra} \\ \text{dio y velocidad fijos} \end{array} \right\} \rightarrow L_{\max} = n\pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} - m^2 \right)^{-1/2} \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad máxima para} \\ \text{radio y longitud fijos} \end{array} \right\} \rightarrow \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left(\frac{R^2 \pi n^2}{L^2} + m^2 - 1 \right)} \quad (46)$$

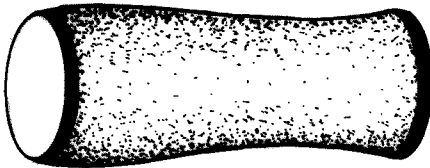
Para que el volumen se mantenga constante se debe cumplir

$$\left. \begin{array}{ll} m = 0 & n = 2, 4, 6 \dots \\ m \neq 0 & n \neq 0 \end{array} \right\} \quad (47)$$

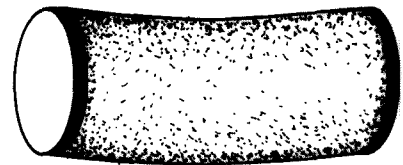
luego aparecen dos modos diferentes de rotura (la zona se rompe por los motivos explicados en 2.4, y que supondremos aplicables también a los modos no axilsimétricos). En la Tabla 1.2 se da un resumen del límite de estabilidad

Tabla 1.2. Modos de rotura de las zonas cilíndricas

Modo axilsimétrico ($m=0, n=2$) Modo no axilsimétrico ($m=1, n=1$)



(Forma en ánfora)



(Forma en comba)

$$L \geq \sqrt{3} \pi R$$

$$\Omega_{\text{rotura}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left(\frac{4\pi^2 R^2}{L^2} - 1 \right)}$$

Rotura a L constante
(Ω aumentando)

$$L \leq \sqrt{3} \pi R$$

$$\Omega_{\text{rotura}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

$$\Omega \leq \sqrt{\frac{\sigma}{3 \rho R^3}}$$

$$L_{\text{rotura}} = 2\pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-1/2}$$

Rotura a Ω constante
(L aumentando)

$$\Omega \geq \sqrt{\frac{\sigma}{3 \rho R^3}}$$

$$L_{\text{rotura}} = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

CAPITULO 3

ESTRUCTURA INTERNA. GIRO DE UNO DE LOS DISCOS

3. ESTRUCTURA INTERNA. GIRO DE UNO DE LOS DISCOS

3.1. INTRODUCCION

La técnica de las zonas flotantes ha sido usada ampliamente en los últimos años tanto para el crecimiento de cristales como para la purificación de materiales de alto punto de fusión. La ventaja de este método es la no necesidad de crisol, tal como se indica en la Fig 3.1, ya que el material fundido es confinado por fuerzas de tensión superficial.

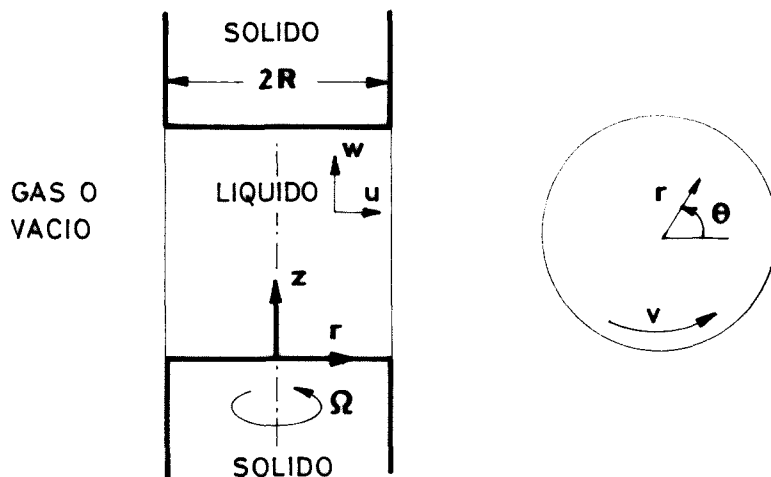


Fig. 3.1. Geometría, sistema de coordenadas y componentes de velocidad.

En un laboratorio terrestre, la longitud máxima de una columna fluida suspendida verticalmente está determinada por el balance entre la presión hidrostática, que aumenta desde el límite superior de la zona fundida y las fuerzas de tensión superficial. Por el contrario, el trabajo en condiciones de gravedad reducida, disminuye las restricciones impuestas a la longitud máxima de la zona flotante, permitiendo un mejor aprovechamiento que

en tierra.

La estabilidad del equilibrio de una zona flotante bajo la amplia variedad de perturbaciones que pueden ocurrir accidental o intencionadamente en un laboratorio espacial es un campo de amplio interés. Su estudio implica una enorme tarea a causa de las propiedades del material fundido, que en general son fuertemente dependientes de la temperatura, y por la complejidad de las perturbaciones que pueden actuar sobre la zona. Para empezar el estudio se impone la introducción de distintas simplificaciones en el modelo, la aproximación mas simple consiste en omitir los cambios de fase, considerando una zona líquida flotante entre dos discos sólidos, coaxiales y paralelos.

Entre las perturbaciones que se pueden considerar en una zona flotante (calentamiento, vibración, campos eléctricos o magnéticos,...) una de las más simples es sin duda la rotación alrededor del eje de simetría motivada, por ejemplo, para homogeneizar las temperaturas en la zona flotante.

Los estudios sobre la estabilidad de la zona flotante pueden ser clasificados en alguna de las siguientes categorías:

1. Estudios hidrostáticos (Carruthers & Grasso [02], Martínez Herranz [16], [17]). La zona gira como un todo. Las propiedades del líquido que constituye la zona y la velocidad angular del fluido alrededor del eje de simetría se suponen constantes.
2. Estudios sobre convección natural inducida en la zo

na (Chang & Wilcox [05], Chun & Wuest [06]). Ahora la zona se mantiene en reposo, pero se consideran gradientes en las propiedades del material como consecuencia del calentamiento, difusión intencionada de especies, contaminación, etc.. Estos gradientes, en presencia de fuerzas de volumen o de superficie, inducen movimientos convectivos en la zona.

3. Estudios sobre convección artificial inducida en la zona (Carruthers & Grasso [02], Carruthers y otros [03]). Estos estudios están relacionados con la respuesta de la columna líquida a una fuerza directamente aplicada, lo que genera una configuración fluida más o menos complicada. Este es el caso en que uno de los discos es puesto en movimiento.

En las páginas siguientes se discuten algunos problemas relacionados con el movimiento giratorio de un líquido viscoso, newtoniano e incompresible, con propiedades constantes, que se mantiene confinado por medio de las fuerzas de tensión superficial entre dos discos coaxiales paralelos.

La formulación matemática del problema es moderadamen-
te complicada, pero la solución de las ecuaciones implicadas presenta dificultades no superables. En ciertos casos aparece un parámetro pequeño y en tal caso el campo fluido puede estudiarse dividiéndolo en diferentes zonas en las cuales son válidas solu-
ciones mucho más simples.

La estructura de la zona central, lejos de la superficie libre de la zona flotante, se conoce bien en muchos casos. La solución matemática para esta zona se empalma, hasta un orden dado del parámetro pequeño, con la solución, válida hasta dicho orden, en una región próxima a la superficie libre. Para ello se hace uso de la técnica de empalme de desarrollos asintóticos (Cole [04], Eckhaus [10], Nayfeh [20], Van Dyke [29]). Incluso en los casos en los que la solución para una zona dada no puede ser expresada en forma cerrada, las condiciones de empalme suministran cierta información sobre las principales características del campo fluido.

El problema del giro de una de las placas estando inicialmente la columna fluida en reposo se va a considerar con cierto detalle. La zona no perturbada está confinada entre dos discos coaxiales y paralelos, ambos con el mismo diámetro. El ángulo de contacto entre el líquido, el material del disco y la atmósfera circundante se supone menor de 90° ; de esta forma, dado el diámetro de los discos y la distancia entre ambos existe un volumen de líquido prefijado que hace cilíndrica la zona flotante no perturbada. Repentinamente uno de los discos empieza a girar, apareciendo una capa de cortadura cerca de este disco, que comienza a crecer por difusión viscosa.

Como se ha indicado anteriormente, se puede buscar una solución para el campo fluido que sea parecida a la configuración exacta en reposo; por supuesto, esta solución será válida única-

mente para tiempos pequeños, contando a partir del inicio del movimiento. La técnica matemática es bastante general y es aplicable a otras configuraciones en las que también aparezca un parámetro pequeño.

El movimiento de la columna fluida cuando uno de los discos gira, partiendo del reposo, ha sido considerado anteriormente en el caso de líquidos no limitados lateralmente (Nigam [21], Benton [01]) y en el de líquidos dentro de un recipiente cilíndrico (Wedemeyer [31], Watkins & Hussey [30], Weidman [32]) pero no parece existir un análisis similar para el caso de confinamiento por tensión superficial.

3.2. ECUACIONES BASICAS

El diagrama de la Fig 3.1 muestra la geometría, el sistema de coordenadas y las componentes de la velocidad en una zona flotante en rotación. El radio de la columna es R mientras que su longitud queda indeterminada, ya que no aparece en el problema que atañe al campo fluido cerca de uno de los discos.

Las ecuaciones diferenciales en forma adimensional para un fluido en rotación axilsimétrica son, en coordenadas cilíndricas (Greenspan [11]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + E \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] , \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = E \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] , \quad (1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + E \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] , \quad (1c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (1d)$$

En estas ecuaciones, cualquier longitud se ha adimensionalizado con R , las velocidades con ΩR , donde Ω es la mayor de las velocidades angulares Ω_w o Ω_f . El tiempo se ha adimensionalizado con Ω^{-1} y la presión con $\rho \Omega^2 R^2$. Finalmente, E es el número de Ekman

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2} .$$

Las condiciones de contorno en el disco son:

$$v = r \frac{\Omega_w(t)}{\Omega} , \quad u = w = 0 \quad \text{en } z=0 . \quad (2a)$$

Y lejos del disco,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[v - r \frac{\Omega_f(t)}{\Omega} \right] = 0 , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u = 0 . \quad (2b)$$

La velocidad vertical no se puede fijar en el infinito pues la capa límite viscosa en la placa induce un flujo axial que persiste en todo el campo fluido.

En cuanto a la superficie libre, en la Fig.3.2 se esquematiza la superficie libre que limita lateralmente la zona flotante; la ecuación de esta superficie, en variables adimensionales es:

$$r = 1 + l(z, t) .$$

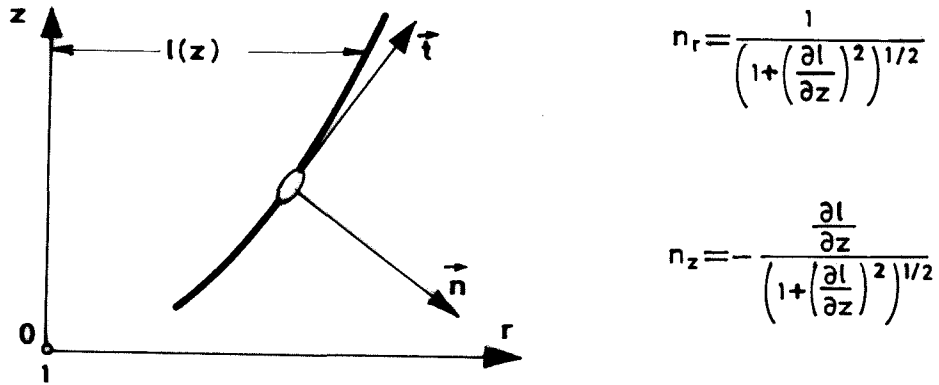


Fig. 3.2 Esquema de un elemento de superficie libre en el plano θ .

En la superficie libre, la primera condición de contorno expresa el balance de fuerzas normales en la interfase. Estas fuerzas son (Landau & Lifshitz [15]), la presión capilar, el exceso de la presión local sobre la ambiente y el esfuerzo viscoso normal. En variables adimensionales:

$$p - \frac{2E}{1 + (\partial l / \partial z)^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial l}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial l}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{C [1 + (\partial l / \partial z)^2]^{3/2}} \left[\frac{1 + (\partial l / \partial z)^2}{1 + l} - \frac{\partial^2 l}{\partial z^2} \right], \quad (3a)$$

donde C es el parámetro de rotación

$$C = \frac{\rho R^3 \Omega^2}{\sigma}.$$

Expresando que el esfuerzo viscoso tangencial se anula en la superficie resultan dos condiciones más, es decir: $T \cdot n - (n \cdot T \cdot n) \cdot n = 0$, siendo T el tensor de esfuerzos viscosos y n el

versor normal a la superficie perturbada. En forma adimensional estas condiciones son:

1. Para la componente axial,

$$2 \frac{\partial l}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \left[1 - \left(\frac{\partial l}{\partial z} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \quad . \quad (3b)$$

2. Para la componente azimutal

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} - \frac{\partial l}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad . \quad (3c)$$

Por otra parte, la condición de que la interfase sea una superficie fluida (pues el flujo másico a través de ella es nulo) resulta:

$$\frac{\partial l}{\partial t} - u + w \frac{\partial l}{\partial z} = 0 \quad . \quad (4)$$

Por último, se supone que la superficie libre permanece anclada al borde del disco: $l(0,t)=0$. Esta hipótesis se deduce de la evidencia experimental, al menos para velocidades de giro bajas. El desbordamiento del líquido da lugar a interesantes problemas que han sido objeto de cierta atención (Hocking [13], [14]).

3.3. GIRO DE UNO DE LOS DISCOS EN UNA ZONA FLOTANTE EN REPOSO

El análisis directo de los problemas no estacionarios de las zonas fluidas en rotación confinadas por la tensión superficial es difícil a causa de la no linealidad de las ecuaciones diferenciales resultantes (1) y las condiciones de contorno (2),

(3) y (4). Un método posible para resolver el problema es linealizar las ecuaciones, perturbando levemente alguna solución exacta conocida y estudiando las consecuencias de la perturbación introducida. En el caso presente la "solución exacta" es la correspondiente a una zona flotante cilíndrica en reposo y en equilibrio. La perturbación consiste en un giro instantáneo de una de las placas alrededor del eje de simetría con velocidad angular constante. La velocidad y la presión se desarrollan en serie de potencias de un parámetro pequeño, ϵ , que mide el tiempo desde el comienzo del giro, introduciéndose estos desarrollos en las ecuaciones de Navier-Stokes y en las condiciones de contorno. Dado que el desarrollo debe ser válido para cualquier valor de ϵ , los términos de igual orden en ϵ deben satisfacer cada igualdad; de esta forma resulta un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes variables relativamente simple, con términos excitadores no lineales. Estas ecuaciones están desacopladas y pueden ser resueltas exactamente en forma cerrada. En la práctica, sin embargo, dos dificultades imposibilitan el cálculo de términos de orden superior:

1. La complejidad de las funciones excitadoras aumenta muy rápidamente con el orden, y
2. El esquema de las perturbaciones falla en la proximidad de la entrefase, por lo que sería necesario examinar los detalles del flujo en las proximidades del borde de las placas donde ciertas variables flui

das experimentan cambios bruscos.

Ambas soluciones, la de la zona central y la de la zona del borde se complementan entre sí: una vale donde la otra falla y ambas deben empalmar en una región de validez común.

En el presente caso, sólo se han obtenido términos de primer orden y no de una forma completamente satisfactoria. Esto es un logro modesto, teniendo en cuenta que ya en la región central (donde se considera el fluido no limitado lateralmente) la solución de primer orden sólo es válida para el primer medio radián del movimiento del disco. Sin embargo, pensamos que esta solución representa un primer paso en el problema y una indicación sobre el camino a seguir en la obtención de soluciones más completas.

Zona central

Es bastante lógico suponer que existe una región central donde, al menos en el primer orden, no se sienten los efectos de la superficie libre. La solución en esta zona central será la correspondiente al movimiento de un fluido viscoso, confinado en la mitad superior del plano ($z \geq 0$), donde en cierto instante inicial el disco, de radio infinito, comienza a girar con velocidad angular constante.

La capa de cortadura producida cerca del disco es, inicialmente, muy delgada. En consecuencia, si se desea utilizar coordenadas de orden unidad, se introducen un tiempo, τ , y una dis

tancia desde el disco, η , ambos dilatados, mientras que el radio r queda inalterado.

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad , \quad \eta = \frac{z}{2\sqrt{E\varepsilon\tau}} \quad .$$

La solución asintótica de este problema, cuando el parámetro ε es pequeño, puede ser escrita como sigue:

$$u(r,z,t) = \varepsilon\tau r [f_1(\eta) + (\varepsilon\tau)^2 f_2(\eta) + (\varepsilon\tau)^4 f_3(\eta) + \dots] \quad , \quad (5a)$$

$$v(r,z,t) = r [g_1(\eta) + (\varepsilon\tau)^2 g_2(\eta) + (\varepsilon\tau)^4 g_3(\eta) + (\varepsilon\tau)^6 g_4(\eta) + \dots] \quad , \quad (5b)$$

$$w(z,t) = -4\varepsilon\tau\sqrt{E\varepsilon\tau} [h_1(\eta) + (\varepsilon\tau)^2 h_2(\eta) + (\varepsilon\tau)^4 h_3(\eta) + \dots] \quad , \quad (5c)$$

$$p(z,t) - \frac{1}{C} = 2E\varepsilon\tau [p_1(\eta) + (\varepsilon\tau)^2 p_2(\eta) + (\varepsilon\tau)^4 p_3(\eta) + \dots] \quad , \quad (5d)$$

Esta forma de expansión es debida a Benton [01]. Las funciones f_1 , g_1 y h_1 fueron calculadas en forma cerrada por Thiriot (1940) (citado por Benton [01]). p_1 fue también calculada en forma cerrada por Nigam [21]. Benton encontró g_2 en forma cerrada y f_2 , f_3 , g_3 , g_4 , h_2 y h_3 por integración numérica. Todas esas funciones están tabuladas en el artículo de Benton y algunas de ellas se han representado en Fig. 3.3.

Región del borde del disco

Podría pensarse que la solución de la región central no es válida cerca de la superficie libre, donde deben cumplirse condiciones de contorno extremadamente complicadas. Se puede esperar, sin embargo, que la región donde tal solución no sea unifor-

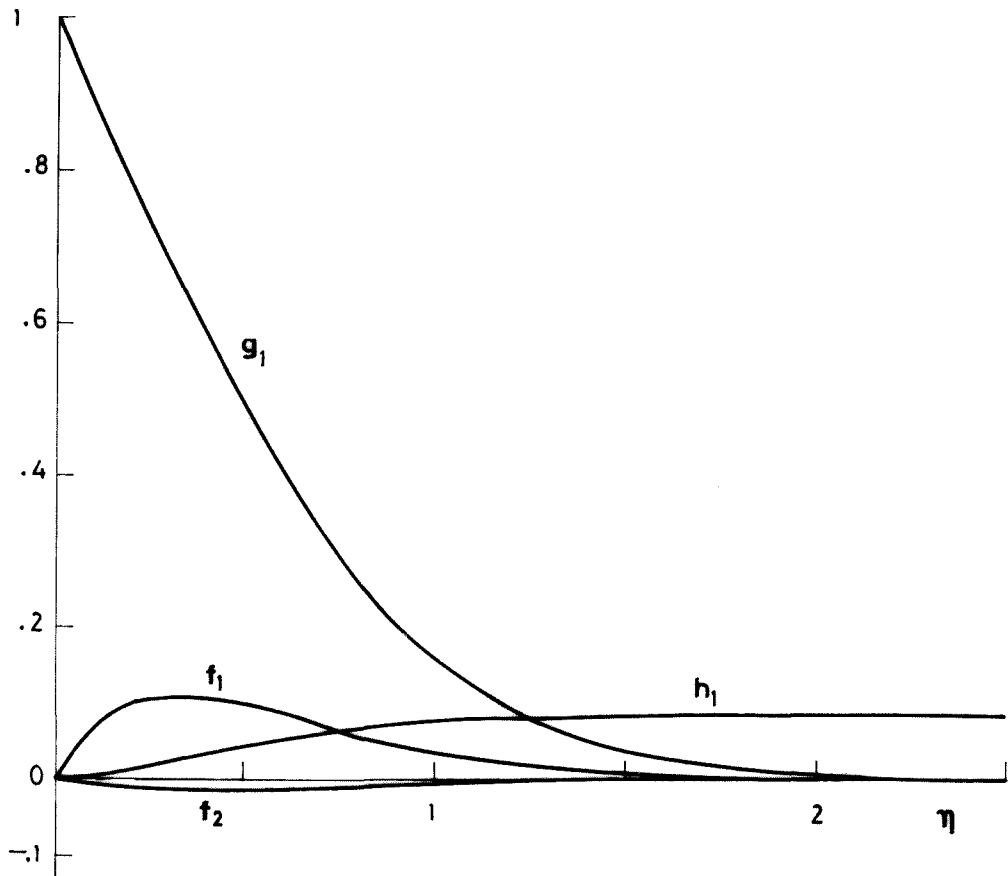


Fig. 3.3. Funciones f_1 , f_2 , g_1 y h_1 . Calculadas por Benton [01].

mamente válida sea muy delgada, lo que sugiere el uso de las siguientes variables interiores. Fig. 3.4.

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad ; \quad \eta = \frac{z}{2\sqrt{E\varepsilon\tau}} \quad ; \quad \xi = \frac{r-1}{2\sqrt{E\varepsilon\tau}}$$

Los desarrollos asintóticos para las variables en esta zona son:

$$u(r, z, t) = \varepsilon\tau \left[\underline{rf_1(\eta)} + r^{-1}u_1(\xi, \eta) + 2\sqrt{E\varepsilon\tau}u_2(\xi, \eta) + \dots \right] , \quad (6a)$$

$$v(r, z, t) = \underline{rg_1(\eta)} + \dots , \quad (6b)$$

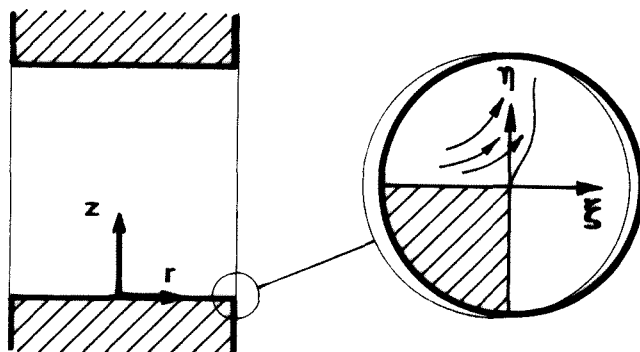


Fig. 3.4. Variables interiores.

$$w(r, z, t) = \varepsilon \tau \left[r^{-1} W_1(\xi, \eta) + 2\sqrt{E\varepsilon\tau} W_2(\xi, \eta) - 4\sqrt{E\varepsilon\tau} \underline{h_1(\eta)} + \dots \right], \quad (6c)$$

$$p(r, z, t) - \frac{1}{C} = \sqrt{E\varepsilon\tau} \left[\frac{1}{2} P_1(\xi, \eta) + \sqrt{E\varepsilon\tau} P_2(\xi, \eta) + 2\sqrt{E\varepsilon\tau} \underline{P_1(\eta)} + \dots \right], \quad (6d)$$

$$l(z, t) = (\varepsilon \tau)^2 \left[L_1(\eta) + 2\sqrt{E\varepsilon\tau} L_2(\eta) + \dots \right]. \quad (6e)$$

Donde los términos subrayados son aquellos que intervienen en la solución de la zona central. En estas expresiones se ha retenido r en vez de ξ por simplicidad en la escritura. Debe tenerse en cuenta que se ha hecho un desarrollo en potencias de $(\varepsilon \tau)^{1/2}$, y por tanto, es necesario calcular varios términos de la solución interior por cada término del desarrollo de la solución de la región central.

Sustituyendo las expresiones dadas en (6) en las ecuaciones (1) y las condiciones de contorno (2, 3 y 4) y observando que el problema para la velocidad azimutal, v , permanece desacoplado, se obtienen las ecuaciones básicas que definen los problemas de primer y segundo orden en la región interior, dados en la

Tabla 3.1. Ambos problemas son bidimensionales y lineales. Desgraciadamente se trata de problemas de condiciones de contorno elípticas y los intentos hechos para encontrar soluciones analíticas simples sólo han tenido, hasta este instante, un éxito parcial.

Tabla 3.1

Problemas de primer y segundo orden en la región interior

Problema de primer orden	Problema de segundo orden
Nomenclatura $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta}$	
Ecuaciones $(L-4)U_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \xi}$ $(L-4)W_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \eta}$ $\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial W_1}{\partial \eta} = 0$	$(L-6)U_2 = \frac{\partial P_2}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \quad (7a,b)$ $(L-6)W_2 = \frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial P_1}{\partial \eta} + \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \quad (8a,b)$ $\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial W_2}{\partial \eta} = 0 \quad (9a,b)$
Condiciones de contorno $\eta = 0 \quad U_1 = W_1 = 0$ $\eta \rightarrow \infty \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} U_1 = 0$ $\xi = 0 \quad P_1 - 2 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0$ $\frac{\partial U_1}{\partial \eta} + \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = - \frac{df_1}{d\eta}$ $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \{U_1, W_1, P_1\} = 0$	$U_2 = W_2 = 0 \quad (10a,b)$ $\lim_{\eta \rightarrow \infty} U_2 = 0 \quad (11a,b)$ $P_2 - 2 \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = 2(f_1(\eta) - U_1(0,\eta) - P_1(\eta)) - \frac{1}{4CE^2} \frac{d^2 L_1}{d\eta^2} \quad (12a,b)$ $\frac{\partial U_2}{\partial \eta} + \frac{\partial W_2}{\partial \xi} = 0 \quad (13a,b)$ $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \{U_2, W_2, P_2\} = 0 \quad (14a,b)$
Forma de la superficie libre $\eta \frac{dL_1}{d\eta} - 4L_1 = -2(U_1(0,\eta) + f_1(\eta))$	$\frac{dL_2}{d\eta} - 5L_2 = -2U_2(0,\eta) \quad (15a,b)$

Debe señalarse que, puesto que la velocidad radial puede ser calculada hasta el primer y segundo orden sin necesidad de considerar la presión, la forma de la superficie libre es independiente del número de Bond, C , supuesto que este es de orden unidad o mayor. Valores de C^{-1} para varios líquidos en un caso típico se recogen en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Valores de C^{-1} . $T = 293 \text{ K}$ $R = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ $\Omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$

Líquido	$\rho \times 10^{-3}$ [kg.m ⁻³]	$\rho \times 10^3$ [N.m ⁻¹]	Referencias y comentarios	C^{-1}
Agua	.9982	72.583	Riddick & Bunger [22]	.582
Propilenglicol	1.0328	72		.558
Glicerina	1.2613	63.3		.401
Dietilenglicol	1.1164	45.21		.324
Dimetil silicona 1000 CS	.973	21.2	DOW CORNING [09]	.174
Dimetil silicona 5 CS	.918	19.7		.172
Agua contaminada con n-Propanol	.9982	70.40	~50 ml. de agua con una gota de contaminante. Padday [21]	.564
Agua contaminada con Tricresil fosfato	.9982	63.30		.507
Agua contaminada con Dietil ftalato	.9982	49.80		.399

3.4. RESULTADOS

El problema de primer orden ha sido resuelto cerca del borde (valores pequeños de la variable ampliada ρ) y lejos del borde (valores grandes de ρ).

La función de corriente para valores pequeños de ρ es:

$$\psi(r, z, t) = \varepsilon \tau \left[\frac{\rho^4}{4!} H_4(\theta) + \frac{\rho^5}{5!} H_5(\theta) + \frac{\rho^6}{6!} H_6(\theta) + \dots \right], \quad (16)$$

donde $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\theta = \arctg \xi/\eta$, y

$$H_4(\theta) = 3 \frac{d^3 f_1}{d\eta^3} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{5}{6} \cos^2 \theta \right), \quad (17a)$$

$$H_5(\theta) = \frac{10}{3} \frac{d^4 f_1}{d\eta^4} \cos^3 \theta \left(1 - \frac{9}{10} \cos^2 \theta \right), \quad (17b)$$

$$H_6(\theta) = \frac{15}{2} \frac{d^5 f_1}{d\eta^5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos 2\theta. \quad (17c)$$

Esta función de corriente indica el movimiento fluido debido a la componente azimutal de la velocidad.

Se han dibujado algunas líneas de corriente en la Fig. 3.5. Estas líneas de corriente cambian con el tiempo. El hecho de que acaben normalmente a la superficie libre no perturbada indica que el fluido, puesto en movimiento radial por fuerzas centrífugas, llena el dominio fluido que crece a causa del desplazamiento de la superficie.

Cabe destacar que la curvatura de las líneas de corriente es moderada en cualquier caso; su valor máximo parece alcanzarse en las proximidades del borde, donde la velocidad es pequeña, por lo que los gradientes de presión cerca de la superficie libre no son grandes.

En Fig 3.6 se muestra la distribución de velocidad radial, $U_1(\xi, \eta) + f_1(\eta)$, cerca del disco. Esta distribución, que presenta un punto de inflexión fuera del marco de la figura, recuer

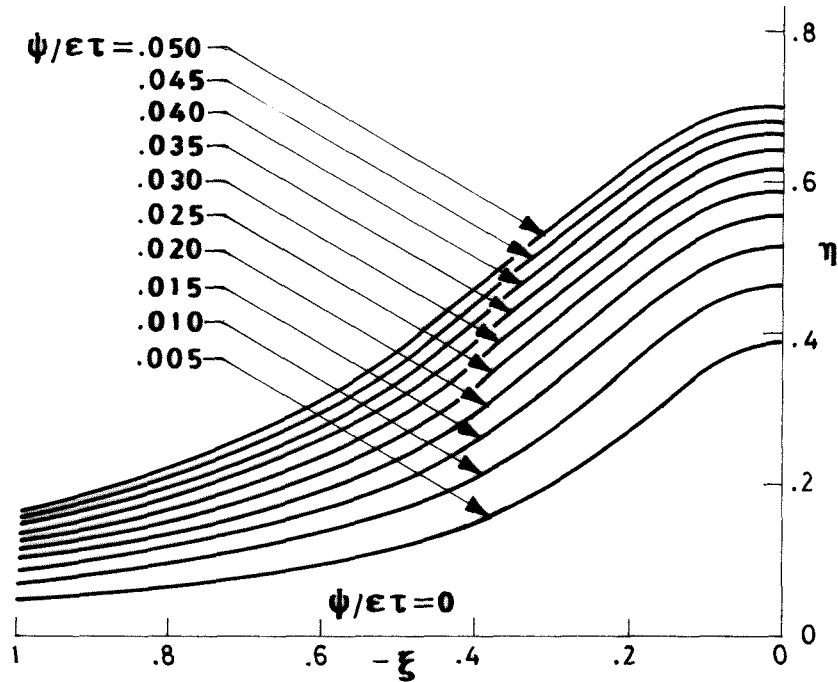


Fig. 3.5. Líneas de corriente cerca del borde del disco, calculadas mediante las ecuaciones (16) y (17).

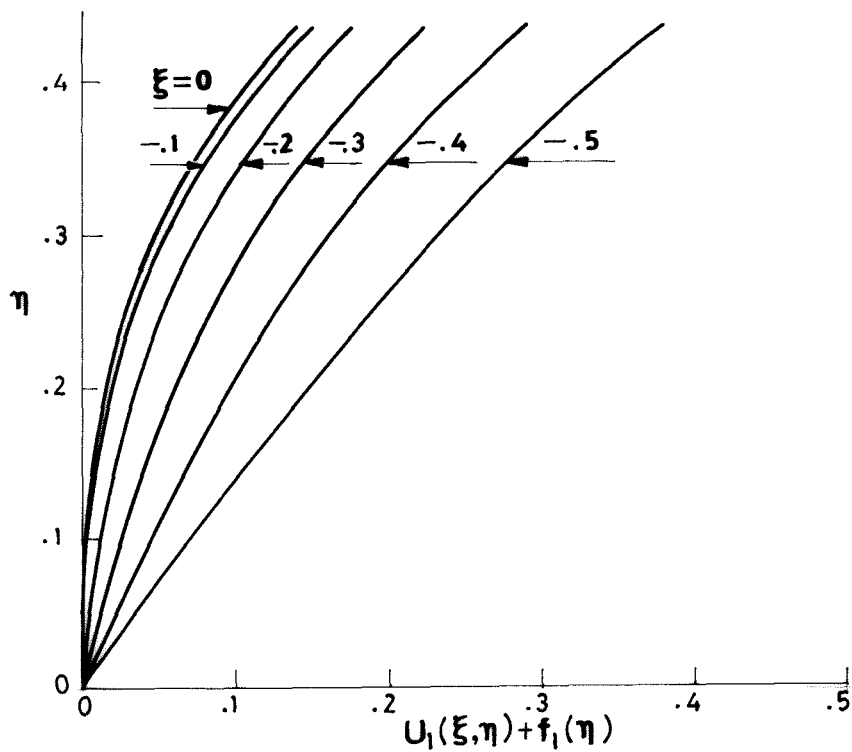


Fig. 3.6. Distribución de velocidad radial cerca del disco.

da la existente cerca del punto de desprendimiento en una capa límite; el parecido no es completo a causa de los términos no lineales de cantidad de movimiento que juegan un papel importante en el desprendimiento de la capa límite, pero que son despreciables aquí. Debe precisarse que la existencia del mencionado punto de inflexión indica marcadamente la posibilidad de inestabilidades que se originen cerca del disco.

En Fig 3.7 se muestra la velocidad radial, $U_1(0,\eta)+f_1(\eta)$, en el límite $\xi=0$ así como la forma, $L_1(\eta)$, de la superficie libre.

Dado que no ha sido posible calcular el campo de velocidades excepto para valores extremos de η , se han empalmado las expresiones de $U_1(0,\eta)$ obtenidas para valores pequeños y grandes de η de la siguiente forma:

Primeramente, una solución del problema, válida cerca de $\xi=0$, se escribe de la forma:

$$U_1(\xi,\eta) = \sum_0^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{2m!} U_{2m}(\eta) \quad , \quad (18a)$$

$$\left. \begin{matrix} W_1(\xi,\eta) \\ P_1(\xi,\eta) \end{matrix} \right\} = \sum_0^{\infty} \frac{\xi^{2m+1}}{(2m+1)!} \left\{ \begin{matrix} W_{2m+1}(\eta) \\ P_{2m+1}(\eta) \end{matrix} \right. \quad (18b)$$

$$(18c)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones del movimiento (7a), (8a) y (9a) y condiciones de contorno (12a) y (13a), resulta un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en η . Los grupos sucesivos de ecuaciones están acoplados y además

en cada uno hay más incógnitas que ecuaciones. Esto se debe a que el problema es elíptico y que, en consecuencia, el movimiento cerca de la superficie libre está afectado por lo que ocurre lejos de ésta. A pesar de todo es posible (Van Dyke [28]) romper la cadena en cierto nivel, quedando un conjunto de ecuaciones de terminado. La aproximación más simple consiste, en nuestro caso, en suponer que los gradientes de presión pueden ser despreciados; de esta forma resulta la siguiente expresión para la velocidad radial:

$$U_1(0, \eta) + f_1(\eta) = \frac{\pi}{2} \left\{ F_1(\eta) \int_{\eta}^{\infty} e^{x^2/2} \operatorname{erfc}^2 x F_2(x) dx - F_2(\eta) \int_{\eta}^{\infty} e^{x^2/2} \operatorname{erfc}^2 x F_1(x) dx \right\} + A F_2(\eta), \quad (19)$$

con

$$F_1(\eta) = 1 + \eta^2 \quad (20a)$$

$$F_2(\eta) = (1 + \eta^2) \operatorname{erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \eta e^{-\eta^2/2} \quad (20b)$$

Podría pensarse que se puede calcular A expresando que $U_1(0, 0) = 0$, pero no es posible, pues la hipótesis de presión uniforme es solamente válida lejos de la placa. Por el contrario, cerca de la placa, la expresión de $U_1(0, \eta)$ apropiada es:

$$U_1(0, \eta) + f_1(\eta) = \frac{1}{12} \frac{d^3 f_1}{d\eta^3} \bigg|_{\eta=0} \eta^3 + \dots \quad (21)$$

Se puede formar una función compuesta con estas dos expresiones de la velocidad radial, (20) y (22), y calcular A estableciendo la condición de conservación de la masa como sigue:

$$\int_0^{\infty} \{U_1(0,\eta) + f_1(\eta)\} d\eta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} h_1(\eta) \quad . \quad (22)$$

recordando (ecuación (5c)) que con $4\varepsilon\tau\sqrt{E\varepsilon\tau}\pi\{\lim_{\eta \rightarrow \infty} h_1(\eta)\}$ obtenemos, en una primera aproximación, el flujo de masa hacia la placa que reemplaza al líquido lanzado hacia fuera en la capa límite.

Una vez que se ha obtenido una primera aproximación para $U_1(0,\eta)$, se deduce $L_1(\eta)$ de (15a). Ambas funciones, $U_1(0,\eta)$ y $L_1(\eta)$, están representadas en Fig. 3.7.

Se puede ver en Fig. 3.7 que la zona flotante permanece cilíndrica muy cerca de la placa. Esto contrasta con gran parte de la información disponible sobre la forma de las zonas flotan-

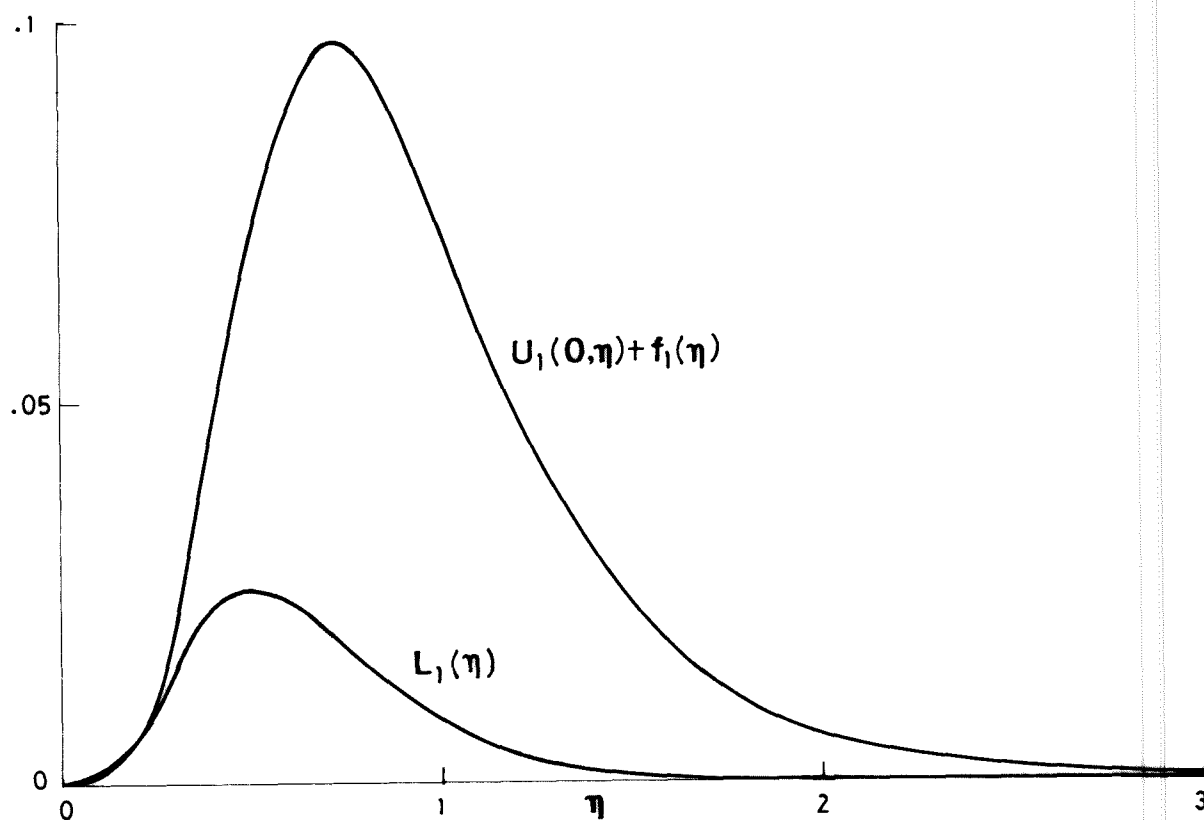


Fig. 3.7. Velocidad radial en $\xi=0$ y forma de la superficie libre.

tes en rotación, que parece indicar que existe cierta conicidad cerca de las placas. Esta conicidad puede ser debida tanto a efectos gravitacionales como a ulteriores desarrollos en el movimiento de rotación. De hecho, la condición de contorno (3b) indica que, supuesto que $\partial l / \partial z$ es suficientemente pequeño, como ocurre en los primeros instantes del movimiento, $\partial w / \partial r = -\partial u / \partial z$. Como cerca de la placa $\partial w / \partial r = 0$, $U(0, \eta)$ tiene un cero de orden η^2 al menos en $\eta = 0$. Por tanto, véanse las ecuaciones (15a) y (15b), la superficie debe permanecer cilíndrica cerca del disco.

3.5. OTRAS SOLUCIONES DE LA ZONA CENTRAL

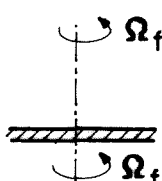
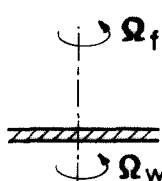
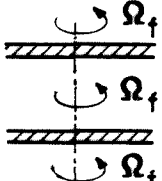
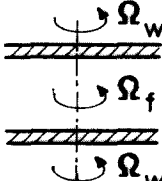
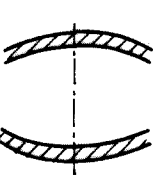
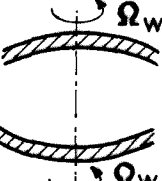
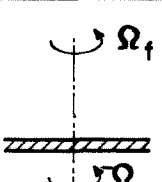
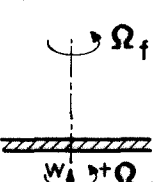
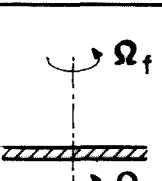
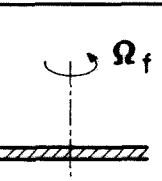
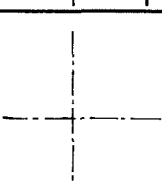
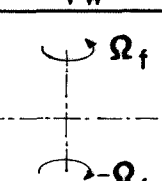
La aproximación desarrollada se basa en la existencia de una solución exacta a la que se perturba ligeramente. La misma aproximación podría ser usada, seguramente, en otros casos.

En la Tabla 3.3 se muestra una lista de soluciones ya disponibles que podrían ser relevantes en los problemas relacionados con la estructura de las zonas flotantes. En muchos casos existen soluciones válidas no sólo para valores pequeños de los parámetros de control, pero son de poca utilidad aquí, ya que las condiciones de contorno en la superficie libre son sencillas solamente en el caso en el que la superficie libre difiere poco del cilindro circular.

La capa de cortadura en el caso de las placas en contrarrotación (caso 6 de la Tabla 3.3) ha sido incluido porque su estudio requiere solamente pequeños retoques en la solución cer-

Tabla 3.3

Soluciones relevantes de la zona central

Condiciones de contorno		Parámetro pequeño	Referencias
en $t < 0$	en $t \geq 0$		
1 		$\epsilon = \frac{\Omega_w}{\Omega_f} - 1$	Greenspan [11] pp. 28-34
2 		$\epsilon = \frac{\Omega_w}{\Omega_f} - 1$	Greenspan & Howard [12]
3 		$\epsilon = \sqrt{E}$	Greenspan [11] pp. 38-63
4 		$\epsilon = \frac{t}{\tau}$	Davis & Ludford [07]
5 		$\epsilon = \frac{t}{\tau}$	Davis & Ludford [08]
6 		$\epsilon = \frac{t}{\tau}$	

ca del disco. Un problema más difícil es la localización de la capa de cortadura. En el caso de los discos en contrarrotación (la velocidad angular de un disco opuesta a la del otro y ambas del mismo módulo) la capa de cortadura está obviamente situada a mitad de camino entre los dos discos. En otros casos dicha posición es difícil de situar. Posteriormente, Mellor y otros [19], han señalado que pueden aparecer varias células en el plano meridiano. Debe añadirse, por último, que la localización correcta de estas capas de cortadura requiere el conocimiento de aproximaciones de orden superior que, por ahora, aún se está lejos de conseguir.

3.6. CONCLUSIONES

El trabajo presentado en estas páginas es incompleto y debería hacerse un estudio más detallado. Sin embargo, es indudable que este esfuerzo significa un avance en el análisis de los distintos fenómenos que aparecen cerca de los discos en una zona flotante con un disco en rotación.

Aunque el dominio fluido que se ha considerado hasta ahora es muy reducido, es el más interesante desde el punto de vista del análisis y de las aplicaciones.

Desde el punto de vista de la dinámica de los fluidos, la zona del borde del disco es una fuente de inestabilidades que debería considerarse con detalle en el futuro. En la técnica del crecimiento de cristales se deberá tener especial cuidado con el

frente de crecimiento (es decir, la zona cerca del disco) cuando se persiga la obtención de monocristales homogéneos.

Un estudio más completo de la capa límite cerca del disco debería incluir: no uniformidad de temperaturas, dependencia de las propiedades con la temperatura (particularmente la viscosidad) y cambios de fase. Nuestra impresión es que todos estos efectos se podrían considerar sin un trabajo adicional excesivo, una vez que el problema incompresible se ha resuelto correctamente.

CAPITULO 4

GIRO DE UNO DE LOS DISCOS SOPORTE EXPERIMENTACION EN TIERRA

4. GIRO DE UNO DE LOS DISCOS SOPORTE. EXPERIMENTACION EN TIERRA

4.1. INTRODUCCION

En la superficie de la tierra, las zonas líquidas flotantes pueden ser simuladas utilizando la técnica de "flotabilidad neutra". Esta técnica, ya usada por Plateau [24], se basa en la suspensión de un líquido dentro de otro, siendo ambos líquidos inmiscibles y de igual densidad. Aparte de Plateau, ya mencionado, Mason [18] y Carruthers & Grasso [02], entre otros, han aplicado más recientemente esta técnica de la flotabilidad neutra en las zonas líquidas flotantes. Los experimentos realizados por estos últimos autores son relevantes en el estudio de la estabilidad de las zonas flotantes bajo perturbaciones similares a las que podrían aparecer en el espacio.

La principal objeción a esta técnica está en la existencia de presiones y fuerzas viscosas, inducidas por el movimiento del líquido exterior, que provocan ciertos efectos dinámicos en la zona. En nuestro caso, los esfuerzos viscosos que actuarían en la entrefase entre ambos líquidos podrían invalidar las condiciones de contorno supuestas en el modelo teórico.

Afortunadamente, gran parte de los efectos asociados a la fluidodinámica de la zona cuando uno de los discos empieza a girar repentinamente sólo se manifiesta cerca de las placas y, en

consecuencia, su simulación no precisa de zonas de gran longitud.

La máxima longitud estable de una zona flotante, $2h$, en función del radio de la misma, R , se muestra en Fig 4.1. Es importante señalar que, para valores grandes de R (en el agua para $R > 6$ mm), se alcanza un valor asintótico de la máxima longitud de la zona:

$$2h = 2.84 \sqrt{\sigma/g\rho} \quad . \quad (1)$$

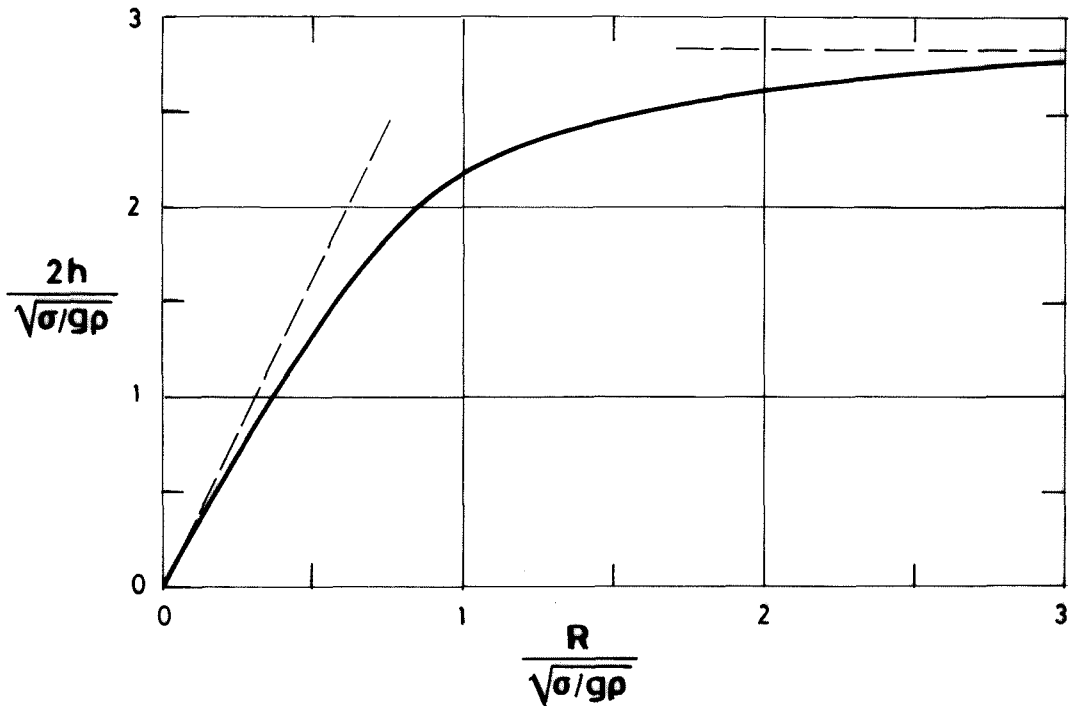


Fig. 4.1. Longitud máxima estable de una zona flotante en un campo gravitacional de acuerdo con Heywang. (Wuest [33]).

Recordando el análisis hecho en el 4º Informe de la capa límite viscosa próxima a los discos, los fenómenos fluidodinámicos de interés ocurren, como mucho, a una distancia adimensional desde el disco de dos unidades ($\eta = z/2\sqrt{E\tau} \leq 2$), esto significa

en variables físicas que el espesor de la capa, z , está acotado:

$$z \leq 4R \sqrt{E\epsilon\tau} \quad . \quad (2)$$

Además, en el modelo teórico tan sólo se consideran tiempos pequeños ($t=\epsilon\tau \leq 1$), recordando la definición del número de Eckman,

$$E = \frac{v}{\Omega R^2} \quad , \quad (3)$$

resulta por tanto un límite superior del espesor de capa viscosa próxima a los discos:

$$2z = 8 \sqrt{v/\Omega} \quad . \quad (4)$$

En la Tabla 41 se indican valores representativos de la longitud máxima de la zona, $2h$, y del espesor máximo de la capa viscosa, $2z$, para ciertos líquidos y valores grandes del radio de la zona, R .

En la Tabla se observa que ambas longitudes, $2h$ y $2z$, son muy parecidas en el caso del agua. Para fluidos más viscosos, la capa viscosa crece más rápidamente; para evitar este crecimiento excesivo debe aumentarse la velocidad de giro, Ω , con la consiguiente disminución del tiempo de experimentación.

Por ejemplo, para el agua, si la velocidad angular es de 1 rad.s^{-1} , el tiempo de experimentación no excede al medio segundo.

4.2. DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO

En el laboratorio se ha construido una pequeña mesa gi-

Tabla 4.1

Máxima longitud estable de una zona flotante, $2h$, de acuerdo con el valor asintótico de la fórmula de Heywang, comparada con el doble del espesor de la capa viscosa próxima al disco giratorio, $2z$, para una velocidad de giro de 1 rad.s^{-1} . Las propiedades tabuladas de los líquidos corresponden a una temperatura de 293 K.

Líquido	$\sigma/g\rho\times10^6$ [m] $g=9.81 \text{ m.s}^{-2}$	$\nu\times10^6$ [m ² .s ⁻¹]	$2h\times10^3$ [m]	$2z\times10^3$ [m]
Agua	7.41	1.0037	7.73	8.01
Propilenglicol	7.11	54.23	7.57	58.9
Glicerina	5.12	487.6	6.42	176.
Dietilenglicol	4.12	38.98	5.77	45.2
Dimetil silicona 1000 CS	2.22	1000.	4.23	253.
Dimetil silicona 5 CS	2.19	5.	4.20	17.9

ratoria para la simulación de la zona flotante. El aparato, tal como se indica en Fig 4.2, consiste en un disco giratorio y un disco estacionario; ambos tienen un diámetro de 10 cm y se pueden separar axialmente hasta 1 cm por medio de un tornillo micromé- trico con una precisión de $\pm 1 \text{ mm}$.

El fluido se inyecta en la zona a través del eje del disco superior y el volumen del fluido inyectado queda determinado por la posición del pistón de la jeringa de inyección (no re- presentada en la figura). El llenado de la zona se realiza inyectando el fluido al mismo tiempo que se van separando lentamente

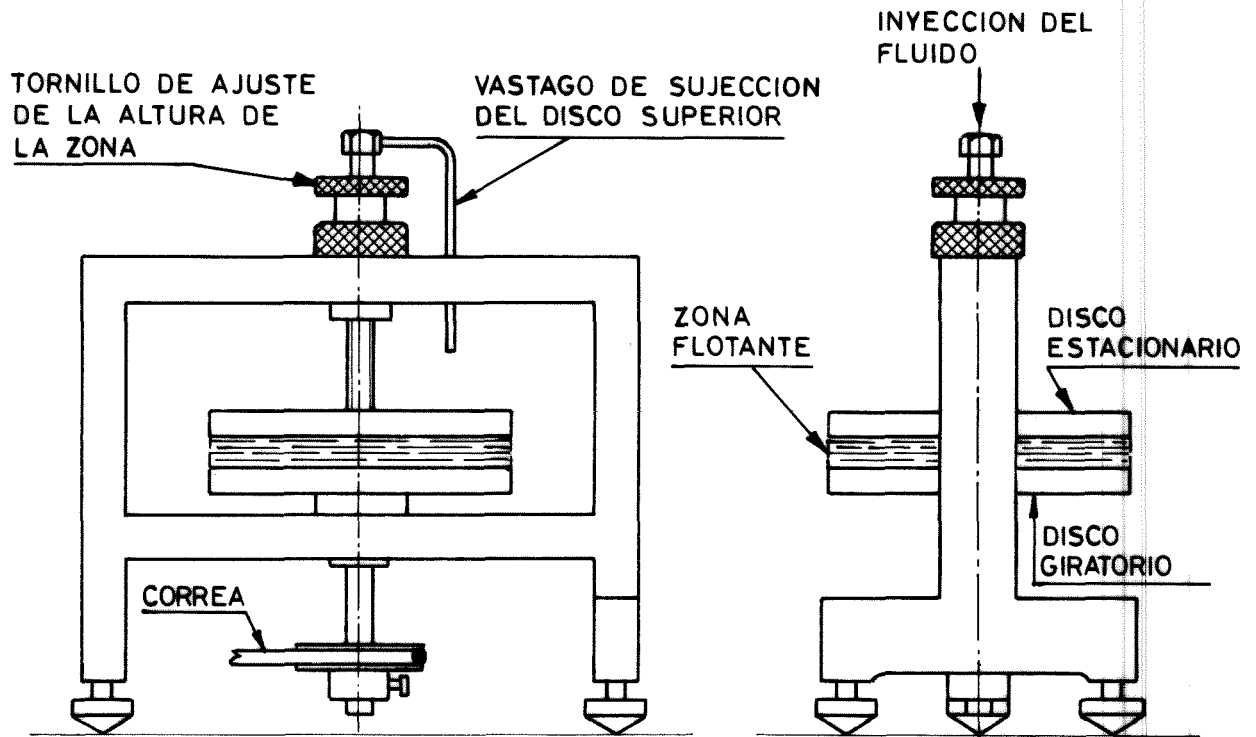


Fig. 4.2. Esquema de la mesa giratoria.

las placas desplazando verticalmente el disco superior por medio del tornillo micrométrico.

El disco inferior está conectado a través de una correa al eje de un motor eléctrico de corriente continua de velocidad variable. La potencia del motor es 2.4 W y puede girar en ambos sentidos con una precisión en la velocidad de giro de $\pm 1\%$.

El disco superior es transparente para permitir la visión directa y la toma de fotografías de la zona. La cara superior del disco giratorio (inferior) se ha recubierto con una capa de pintura conductora de plata, sobre la que se ha dibujado, por

vaciado, una estrecha franja radial cuya superficie está aislada eléctricamente en ciertos tramos. El objetivo de esta capa de pintura es doble: por una parte, conseguir sobre la placa los electrodos necesarios para el proceso de visualización y, por otra, ofrecer un fondo contrastado para la toma de fotografías.

La visualización se logra al cambiar localmente el color de una solución con un indicador de pH cuando se aplica una tensión continua entre dos electrodos sumergidos en el fluido a visualizar. En este caso particular uno de los electrodos es la franja radial mencionada anteriormente y el otro es la pintura conductora de plata que recubre el resto de la placa. Al aplicar la tensión se forman pequeñas manchas de color sobre las regiones conductoras de la banda radial que sirven como trazadores al iniciar el movimiento.

Para esta técnica de visualización, usada en esta ocasión por primera vez en el laboratorio, se ha utilizado, como fluido de trabajo, una solución en agua destilada de Azul de Timol al .01% en peso. Esta solución se trata primeramente con NaOH 1N (aproximadamente 0.25 cm^3 por litro de solución) hasta quedar ligeramente básica ($\text{pH} \approx 8$, color azul oscuro) y después con ClH 1N hasta conseguir que quede ligeramente ácida (color amarillo anaranjado). En la Fig 4.3 se muestra el efecto del cambio de pH sobre una solución de Azul de Timol al .008%.

La configuración del experimento, para esta primera etapa, es la esquematizada en el diagrama de bloques de la Fig 4.4.

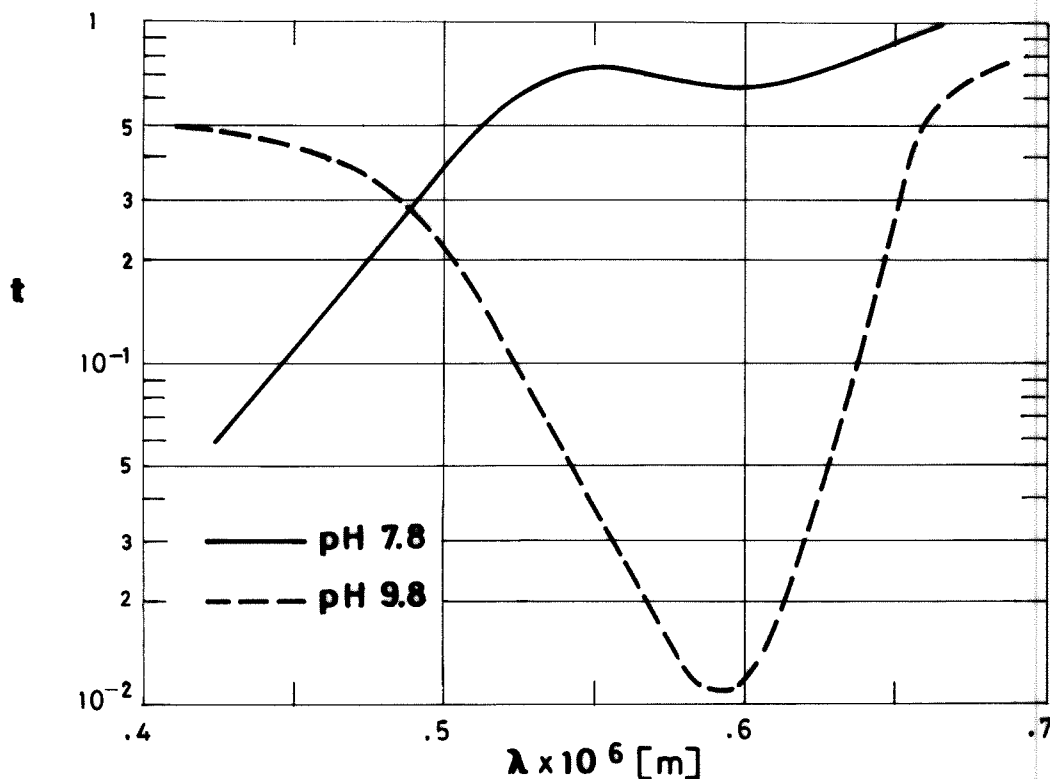


Fig. 4.3. Transmitancia, t , en función de la longitud de onda, λ , de una solución de Azul de Timol en agua al .008%. [Baker, 1966, J. Fluid Mech. 26, p. 573].

La señal de comienzo dada por el disparador llega a dos temporizadores, uno de ellos fijo y el otro variable; el primero conecta la fuente de alimentación a los electrodos del sistema de visualización situados en la placa giratoria y dos segundos después conecta el motor; la placa comienza a girar con una velocidad angular de 1.23 rad.s^{-1} al tiempo que el contador recibe la señal de arranque (S1). El temporizador variable que recibió la señal del interruptor da a su vez un impulso al obturador de la cámara fotográfica (Asahi-Pentax Spotmatic, con objetivo Macro-Takumar 1:4/50) en un tiempo prefijado comprendido entre los 2 y los 2.5

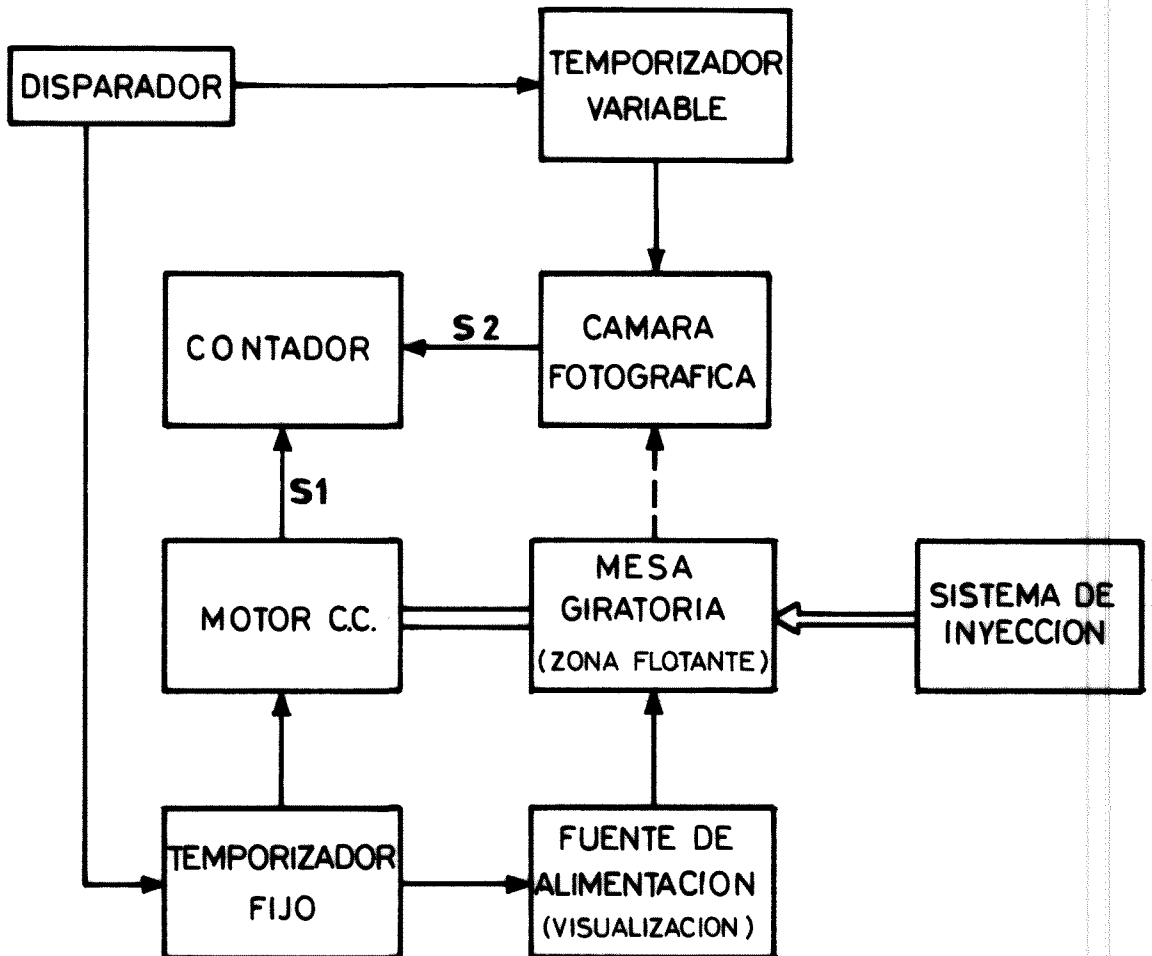


Fig. 4.4. Diagrama de bloques del experimento.

segundos después del disparo del interruptor. Al mismo tiempo que se dispara la cámara llega de ésta un impulso de parada (S2) al contador (Contador Universal Hewlett-Packard 5325B).

Esta secuencia se repite tantas veces como pruebas fotográficas se desee obtener.

4.3. CONCLUSIONES

Desde el punto de vista de la puesta a punto y utiliza
ción de un nuevo método de visualización, esta primera serie de
experimentos ha constituido un éxito: la visualización por cambio
de pH ofrece notables ventajas sobre otros métodos en el campo
de las zonas flotantes; en primer lugar la no existencia de per-
turbaciones: la porción de fluido coloreado tiene las mismas pro
piedades físicas que el resto y es posible formarlo en las zonas
de interés, las placas, sin necesidad de taladros u orificios;
otra ventaja es la no contaminación de la zona por el colorante;
en efecto, la traza coloreada de azul (básica) es neutralizada
al cabo de un cierto tiempo por el medio ácido que la rodea, res
tableciéndose las condiciones primitivas (color amarillo); por
último es preciso señalar la facilidad de control: la intensidad
del color de la región básica es, dentro de ciertos límites, pro
porcional a la tensión aplicada.

El conjunto de pruebas gráficas obtenidas, algunas de
las cuales se presentan en el Anexo, significan tan sólo una dé-
bil ayuda para las investigaciones teóricas que se siguen desarro-
llando en el laboratorio; los principales inconvenientes que pre
sentan son, entre otros, el excesivo grosor de los trazos que ha
cen imprecisas las medidas, la falta de resolución en la zona del
borde de los discos, debido a una inapropiada situación de la cá
mara, y la gran altura inicial de las trazas de color (véase el
Anexo).

Actualmente se está trabajando para vencer estas dificultades en diversos frentes:

- Utilización de una cámara de cine de alta velocidad (hasta 200 imágenes por segundo) para el registro del movimiento, axial y lateralmente en una sola secuencia.
- Construcción de una mesa giratoria de mayores dimensiones que permita la incorporación al disco giratorio de un equipo de toma de imágenes con la indudable ventaja de un sistema móvil de referencia.
- Preparación de nuevos discos de mayor diámetro con un sistema puntual de visualización y rejillas de referencia.

4.4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

En este Anexo se presentan algunos de los resultados experimentales obtenidos, así como un cálculo teórico de las sendas seguidas por las partículas fluidas próximas a la placa en rota-ción.

Recordando las expresiones de las componentes de la velocidad en la región central (Ecs. (5) capítulo anterior) resultaba, aproximando la velocidad adimensional normal al disco por el primer término del desarrollo:

$$w = -4t \sqrt{Et} h_1(\eta) , \quad (5)$$

ahora bien, $\eta = z/2\sqrt{Et}$, y en consecuencia:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{E}{t} \eta + 2 \sqrt{Et} \frac{d\eta}{dt} ; \quad (6)$$

sustituyendo (5) en (6), resulta:

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\eta}{2t} = -2t h_1(\eta) , \quad (7)$$

con la condición $\eta = \infty$ en $t=0$.

Para integrar la ecuación diferencial (7) numéricamente es preciso comenzar la integración desde un valor finito de η , este valor puede ser la solución analítica de la ecuación para valores grandes de la variable:

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\eta}{2t} = -2t h_{\infty} , \quad (8)$$

siendo $h_{\infty} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} h_1(\eta)$.

La solución de (8) es:

$$\eta = \frac{z_0}{2\sqrt{Et}} - \frac{4}{5} t^2 h_{\infty} \quad , \quad (9)$$

donde z_0 es la altura inicial, adimensionalizada con R , de la región de color azul (trazadora). Esta solución, válida para $\eta > 3$, permite integrar numéricamente la ecuación diferencial (7) obteniendo $\eta = F(z_0, t)$.

Conocida $\eta = F(z_0, t)$, la determinación de las componentes radial y azimutal es inmediata. Para la componente radial:

$$u = \frac{dr}{dt} = r t f_1(\eta) \quad , \quad (10)$$

por tanto:

$$\frac{r}{r_0} = \exp \left[\int_0^t x f_1(F(z_0, x)) dx \right] \quad , \quad (11)$$

y para la componente azimutal:

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = r g_1(\eta) \quad , \quad (12)$$

$$\theta = \int_0^t g_1(F(z_0, x)) dx \quad . \quad (13)$$

Dado que el modelo teórico desarrollado se basa en que $t \leq 1$, el límite superior de integración en los cálculos es $t=1$.

En la Fig. 4.5 se presentan los resultados obtenidos numéricamente a partir de las expresiones anteriores, para distintas alturas iniciales de las partículas. Los resultados se han representado hasta $t=.625$ que corresponde, aproximadamente, al primer medio segundo del movimiento.

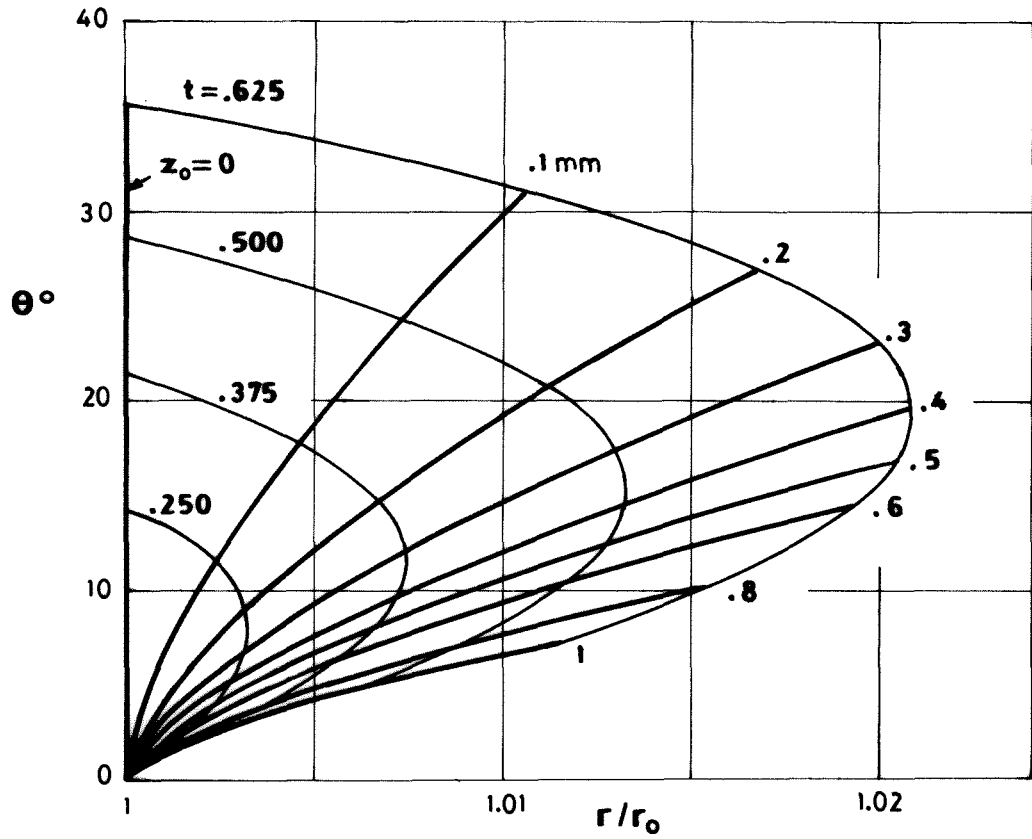


Fig. 4.5. Sendas de las partículas para diferentes alturas iniciales, z_0 . El tiempo, t , está adimensionalizado con Ω^{-1} (velocidad angular del disco).

Algunos resultados experimentales se muestran en las láminas L1, L2 y L3. Los números al lado de las fotografías indican, respectivamente, el ángulo recorrido y el tiempo desde el inicio del movimiento. La velocidad angular era de 1.23 rad.s^{-1} , la altura de la zona 5 mm, el diámetro de los discos 10 cm y el volumen inyectado 39 cm^3 .

La parte del disco giratorio mostrada en las láminas se indica en la Fig. 4.6 así como un esquema de la región fotografiada.

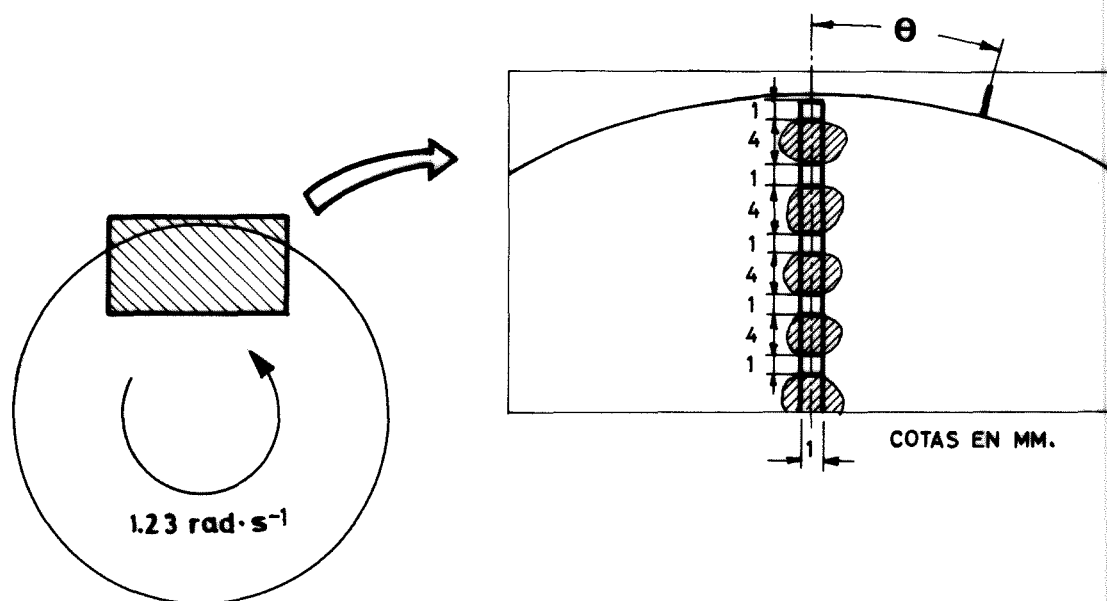


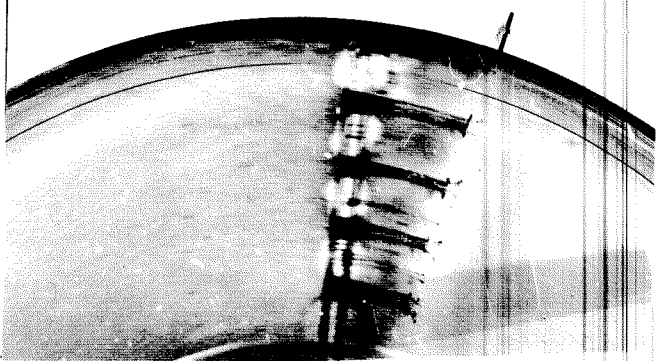
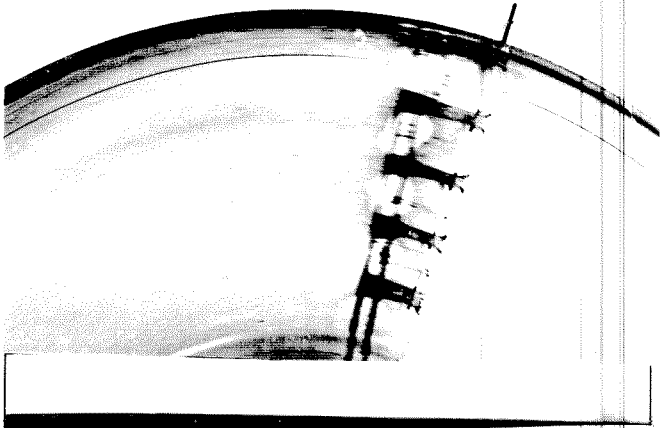
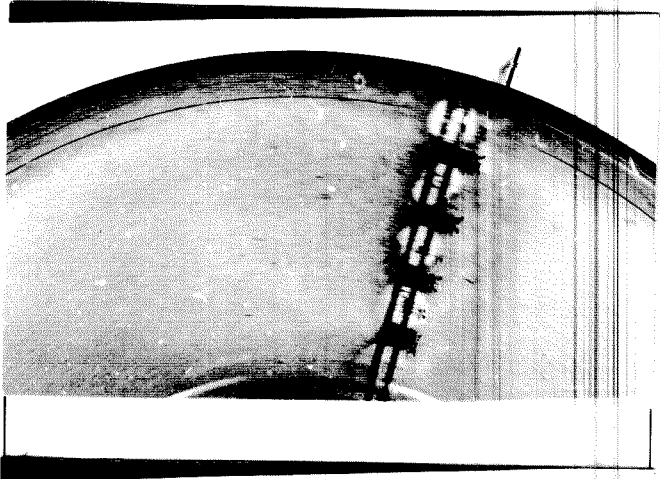
Fig. 4.6. Esquema de la zona fotografiada.

El análisis de las fotografías muestra trayectorias muy aproximadamente circulares, consecuencia de un tiempo excesivo en la formación del colorante; este tiempo fue de 2 segundos durante los experimentos, formándose columnas de colorante de una altura inicial superior a 2 mm (la altura de la zona líquida era de 5 mm), por tanto las fotografías muestran la superposición del movimiento de partículas situadas en distintos planos paralelos a los discos, algunos de los cuales están, obviamente, fuera de la capa límite viscosa objeto del estudio.

L A M I N A S

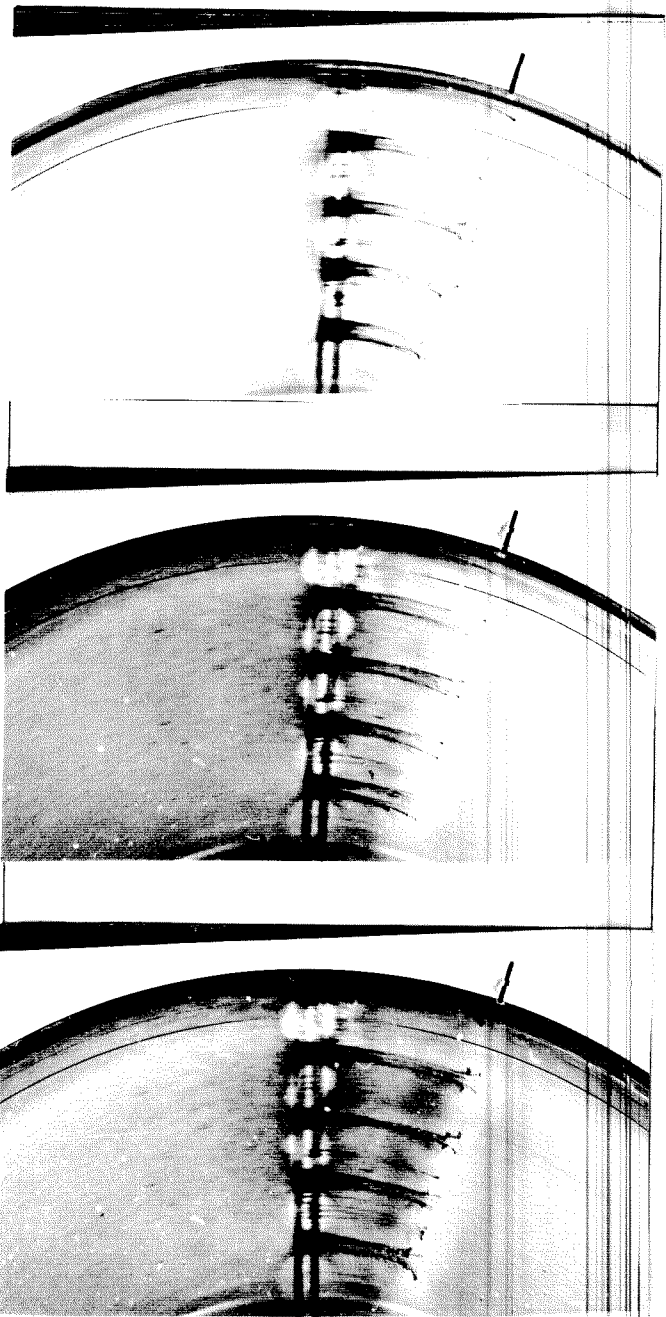
L-1

θ°	t [s]
3.5	.034
7.5	.113
13.5	.190



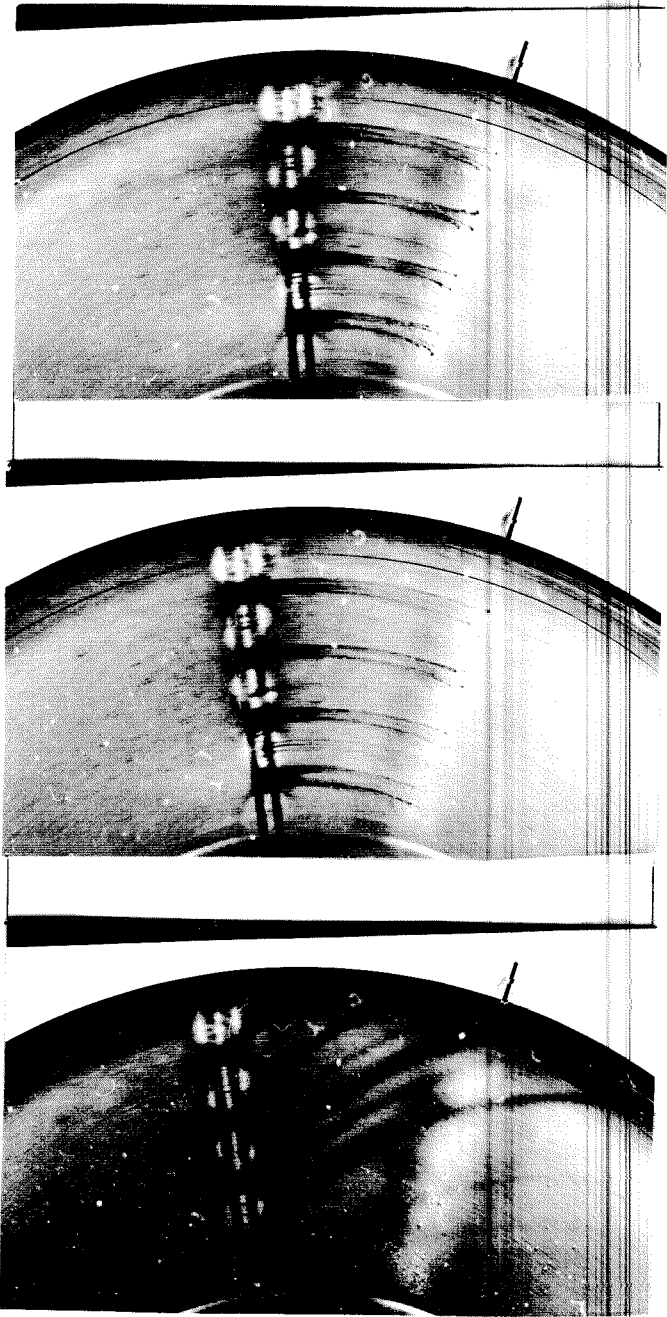
L-2

θ°	t[s]
15	.212
16.5	.240
18	.255



L-3

θ°	$t[s]$
21	.305
25.5	.357
REGIMEN ESTACIONARIO	



REFERENCIAS

- [01] Benton, E.R. 1966 "On the Flow Due to a Rotating Disk",
J. Fluid Mech., Vol. 24, part 4,
April 1966, pp. 781-800.
- [02] Carruthers, J.R., 1972 "Studies of Floating Liquid Zones
Grasso, M. in Simulated Zero Gravity",
J. Appl. Phys., Vol. 43, No. 2,
Feb. 1972, pp. 436-445.
- [03] Carruthers, J.R., 1975 "Studies of Rotating Liquid
Gibson, E.G., Floating Zones on Skylab IV",
Klett, M.G., AIAA Paper 75-692, AIAA 10th
Facemire, B.R. Thermophysics Conference, Den-
ver, Colorado, 27-29 May, 1975.
- [04] Cole, J.D. 1968 "Perturbation Methods in Applied
Mathematics",
Blaisdell Publishing Co. Wal-
tham, Mass. 1968, Chap. 4, pp.
120-221.
- [05] Chang, C.E., 1976 "Analysis of Surface Tension
Wilcox, W.R. Driven Flow in Floating Zone
Melting",
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.
19, No. 4, April 1976, pp. 355-
-366.
- [06] Chun, C.H., 1977 "Flow Phenomena in Gravitationless
Wuest, W. Melting Zones in the Presence of
Electromagnetic Fields",
Presentado en 20th COSPAR Meet-
ing, Tel-Aviv, Israel, 7-18 Ju-
nio, 1977.

- [07] Davis, R.W., 1974 "Stagnation-Point Flow in a Rotating Fluid",
Ludford, G.S.S. Phys. Fluids, Vol. 17, No. 2,
Feb. 1974, pp. 275-279.
- [08] Davis, R.W., 1974 "Rear Stagnation-Point Flow in a
Ludford, G.S.S. Rotating Fluid",
Phys. Fluids, Vol. 17, No. 11,
Nov. 1974, pp. 1941-1944.
- [09] DOW CORNING 1963 "Information about Silicone
Fluid Products from Dow Corning",
Dow Corning Bulletin 05-061,
Nov. 1963.
- [10] Eckhaus, W. 1973 "Matched Asymptotic Expansions
and Singular Perturbations",
North Holland, Amsterdam, 1973,
Chap. 2, pp. 43-96.
- [11] Greenspan, H.P. 1968 "The Theory of Rotating Fluids",
Cambridge, University Press,
1968, Chap. 3, pp. 133-139.
- [12] Greenspan, H.P., 1963 "On a Time Dependent Motion of a
Howard, L.N. Rotating Fluid",
J. Fluid Mech., Vol. 17, part 3,
Nov. 1963, pp. 385-404.
- [13] Hocking, L.M. 1976 "A Moving Fluid Interface on a
Rough Surface",
J. Fluid Mech., Vol. 76, part 4,
Aug. 1976, pp. 801-817.

- | | | | |
|------|---|------|--|
| [14] | Hocking, L.M. | 1977 | "A Moving Fluid Interface. Part 2. The Removal of the Force Singularity by a Slip Flow",
J. Fluid Mech., Vol. 79, part 2,
Feb. 1977, pp. 209-229. |
| [15] | Landau, L.D.,
Lifshitz, E.M. | 1959 | "Fluid Mechanics",
Pergamon Press, London, 1959,
Chap. 7, pp. 230-244. |
| [16] | Martínez Herranz, I. | 1976 | "Floating Zone under Reduced Gravity - Axisymmetric Equilibrium Shapes",
en "Material Sciences in Space",
ESA SP 114, Paris, Sept. 1976,
pp. 277-282. |
| [17] | Martínez Herranz, I. | 1977 | "Floating Zone - Equilibrium Shapes and Stability Criteria",
Presentado en 20th COSPAR Meeting, Tel-Aviv, Israel, 7-18 Junio, 1977. |
| [18] | Mason, G. | 1970 | "An Experimental Determination of the Stable Length of Cylindrical Liquid Bubbles",
J. Colloid Interface Sci., Vol. 32, No. 1, Jan. 1970, pp. 172-176. |
| [19] | Mellor, G.L.,
Chapple, P.J.,
Stokes, V.K. | 1968 | "On the Flow between a Rotating and a Stationary Disk",
J. Fluid Mech., Vol. 31, part 1,
Jan. 1968, pp. 95-112. |

- [20] Nayfeh, A.H. 1973 "Perturbation Methods",
John Wiley & Sons, New York,
1973, Chap. 5-6, pp. 159-307.
- [21] Nigam, S.D. 1951 "Rotation of an Infinite Plane
Lamina: Boundary Layer Growth:
Motion Started Impulsively from
Rest",
Quart. Appl. Math., Vol. 9,
part 1, Jan. 1951, pp. 89-91.
- [22] Padday, J.F. 1977 Comunicación privada.
- [23] Padday, J.F. 1972 "Tables of axisymmetric meniscus
profiles",
J. Electroanalytical and Interf.
Electrochem. 37, 1972, p. 313.
- [24] Plateau, J.A.F. 1873 "Statique Experimentale et Théo-
rique des Liquides Soumis aux
Seules Forces Moléculaires",
Vol. II, Gauthier-Villars, Paris,
1873.
- [25] Rayleigh, Lord 1896 "The theory of sound", II,
Dover Publ., 1945, p. 351.
- [26] Riddick, J.A., 1970 "Organic Solvents",
Bunger, N.B. Third Edition, Wiley Intersci-
ence, New York, 1970.
- [27] Struik, D.J. 1966 "Geometría Diferencial Clásica",
Aguilar, Madrid, 1966, p. 168.

- [28] Van Dyke, M. 1966 "The Circle at Low Reynolds Number as a Test of the Method of Series Truncation",
in "Applied Mechanics", Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich 1964, H. Görtler Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966, pp. 1165-1169.
- [29] Van Dyke, M. 1975 "Perturbation Methods in Fluid Mechanics",
The Parabolic Press, Stanford, California, 1975, Chap. V, pp. 77-98.
- [30] Watkins, W.B., 1973 "Spin-up from Rest: Limitations
Hussey, R.G. of the Wedemeyer Model",
Phys. Fluids, Vol. 16, No. 9, Sept. 1973, pp. 1530-1531.
- [31] Wedemeyer, E.H. 1964 "The Unsteady Flow within a
Spinning Cylinder",
J. Fluid Mech., Vol. 20, part 3, Nov. 1964, pp. 383-399.
- [32] Weidman, P.D. 1976 "On the Spin-up and Spin-down of
a Rotating Fluid. Part 1. Extending the Wedemeyer Model",
J. Fluid Mech., Vol. 77, part 4, Oct. 1976, pp. 685-708.
- [33] Wuest, W. 1976 "Fluid Dynamics of the Floating
Zone",
in "Material Sciences in Space", ESA SP 114, Paris, Sept. 1976, pp. 445-465.

PREVISIONES

Dada la enorme amplitud del frente de estudio que se abre con estas investigaciones, conviene separar el trabajo a partir de aquí en dos planes paralelos de actuación que por su índole particular requieren un tratamiento más o menos independiente, aun conservando la unidad de objetivos del conjunto. Estas partes serían:

- Estudios teóricos de la hidrodinámica de la zona flotante.
- Estudios experimentales: visualización, medición e interpretación.

Pasamos ahora a describir con más detalle los aspectos más urgentes de tratar, y que se prevé acometer en 1978.

Estudios teóricos de la hidrodinámica de la zona flotante

El análisis del equilibrio estático es el más sencillo y se encuentra ya suficientemente avanzado como para requerir un esfuerzo mínimo, aunque se seguiría trabajando en el estudio de las formas de equilibrio no axilsimétricas.

El análisis estático de la estabilidad también se encuentra bastante desarrollado, pero todavía será necesario dedicar un cierto esfuerzo en los siguientes apartados:

- Estabilidad de zonas no axilsimétricas.
- Efectos no lineales sobre la estabilidad de zonas cilíndricas.

Los estudios de la dinámica interna son mucho más complicados, aunque los logros que se van consiguiendo son esperanzadores; cabe citar, por ejemplo, el éxito obtenido en el análisis de la región del borde del disco en una zona líquida cilíndrica súbitamente puesta en rotación, y que fue expuesto en el XXVIII Congreso Internacional de Astronáutica, en Praga (Septiembre 1977).

El programa que se pretende seguir en este campo es el siguiente:

- Estudio de la región del borde en zonas muy cortas.
- Estudios lineales en zonas largas.
 - Pequeñas desviaciones respecto a la rotación global.
 - Pequeñas vibraciones del soporte.
 - Pequeños gradientes de tensión superficial.
 - Pequeñas corrientes internas originadas por la inyección.

Estudios experimentales: visualización, medición e interpretación

Pese a que en un principio no estaba previsto realizar ensayos experimentales durante el año 1977, el desarrollo de las investigaciones condujo a la necesidad de comprobación de ciertas hipótesis fundamentales y se dedicó un esfuerzo considerable al diseño y puesta a punto de un aparato de visualización de la zona de cortadura próxima al disco motor en una zona líquida flotante

(Capítulo 4). Hay que señalar que la técnica de visualización empleada (cambio de pH cerca del punto de viraje) no había sido ensayada previamente en este Laboratorio.

La experiencia nos ha mostrado la dificultad intrínseca a la experimentación en tierra con zonas líquidas flotantes mantenidas tan solo con las fuerzas de tensión superficial (el líquido se derrama a la menor perturbación).

Por otra parte, resulta evidente la necesidad de ganar conocimiento en la solución esperada de un experimento (predicciones teóricas), pero también es imprescindible conocer exactamente el proceso de toma de la información (en nuestro caso: proceso de visualización, de fotografiado y tratamiento de las imágenes).

Parece que ya se ha definido el sistema de visualización en el Spacelab (en el Módulo de "Física de Fluidos"): trazadores sólidos. Esta técnica es bien conocida, pero los materiales que hoy día se utilizan son distintos a los tradicionalmente usados y será necesario tomar contacto con sus posibilidades e inconvenientes. Para ello, se propone un amplio programa de investigación:

— Visualización.

- Propiedades del trazador.
- Ensayos de distribución homogénea.
- Ensayos de coalescencia.
- Resolución máxima.

— Fotografiado.

- Disposición del equipo.
- Material idóneo.
- Resolución máxima.
- Deformaciones ópticas.
- Triangulación de la posición espacial del trazador.

— Interpretación de imágenes.

- Posibilidades de análisis visual cualitativo.
- Sistemas de análisis cuantitativo de la velocidad por computador.

MEMORIA

Habíamos acabado 1976 con un exhaustivo estudio de las formas de equilibrio de una zona líquida sin rotación mantenida entre dos discos coaxiales, y con un importante y prometedor análisis sobre la estabilidad de las formas cilíndricas.

Este año hemos completado en cierto sentido el estudio de la hidrostática de las zonas flotantes, pudiéndose encontrar en el Cap. 1 un compendio de soluciones exactas y aproximadas, y en el Cap. 2 una exposición de los diferentes modos de rotura basado en el análisis estático de la estabilidad del equilibrio.

En junio participamos en la XX Asamblea Plenaria de la COSPAR (celebrada en Tel-Aviv) continuando así los contactos directos con los investigadores y utilizadores de zonas flotantes.

Además, en este año se empezaron los estudios dinámicos propiamente dichos, atacando uno de los problemas específicos (y de los más difíciles) de la zona flotante: el movimiento del líquido en la región del borde de los discos. Este trabajo fue presentado en el XXVIII Congreso Internacional de Astronáutica (celebrado en Praga en septiembre último). Los resultados fueron tan espectaculares que rápidamente se intentó montar un experimento que mostrase el comportamiento real para confrontar resultados. Así, aunque no estaba previsto en el programa de investigaciones propuesto para 1977, se diseñó y construyó un aparato para experimentación en tierra (zonas flotantes menores de 5 milímetros). Se hicieron los ensayos, pero la novedad de la técnica de visualización utilizada (cambio de pH de una solución acuosa de azul de timol) y lo embarazoso del manejo del líquido "sin paredes" no han permitido una medición aceptable del campo de velocidades sino tan sólo una apreciación cualitativa.

APENDICE

PLANIFICACION GENERAL DEL ESTUDIO DE LA ZONA FLOTANTE

1º. Hipótesis constitutivas.

2º. Hidrostática.

- Equilibrio.
- Estabilidad.

3º. Hidrodinámica.

- Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio.
- Convección forzada.
 - Puesta en rotación.
 - Vibración.
 - Inyección de líquido.
 - Separación de los discos soporte.
- Convección libre: principalmente debida a la variación del coeficiente de tensión superficial con la temperatura y con la concentración de sólidos.

4º. Contrastación de los resultados en orden a criticar las hipótesis constitutivas.

- Experimentación.